Der Zusammenhang von Gütefunktion und Testfunktion bei einem Mittelwerttest mit normal verteilter Grundgesamtheit

Ulrich Kockelkorn

1972

"Der Zusammenhang von Gütefunktion und Testfunktion bei einem Mittelwerttest mit normal verteilter Grundgesamtheit".

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
einer Hohen Staatswirtschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität
zu München

vorgelegt von

Ulrich Kockelkorn

1972

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Referent: Prof. Dr. Kurt Weichselberger

Korreferent: Prof. Dr. Hans Richter (Fakultät für Mathematik)

Tag der mündlichen Prüfung: 11. Dezember 1972

Gliederung

	Seite
Einleitung	1
Allgemeine Bezeichnungen und Voraussetzungen	7
§1 Vorbereitende Sätze	10
§2 Die Testschar	20
§3 Die Reihendarstellung von $\phi(t,\sigma^2)$	36
§4 Analyse der Grundgleichung durch Fouriertransformationen	56
§5 Stabilität und Robustheit	72
Literaturverzeichnis	80

Einleitung

In einem wesentlichen Gebiet der Testtheorie beschäftigt man sich mit dem folgenden Entscheidungsproblem:
Es sei X eine zufällige Variable, deren Verteilungsfunktion von einem unbekannten Parameter θ abhängt. An Informationen über θ liegen n unabhängige Realisationen $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \ldots, \hat{x}_n$ von X vor. Aufgrund dieser Werte soll entschieden werden, ob der Parameter θ zu einer Menge H_o oder zu einer Menge H_1 gehört. Man sagt dafür auch, man prüfe die Hypothese H_o gegen die Alternativhypothese H_1. Eine mögliche Strategie ist die folgende:

Man wählt eine geeignete Funktion $T(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = t$ (man nennt dann T eine Stichprobenfunktion oder Statistik) und eine Testfunktion $\phi(t)$ mit $0 \leq \phi(t) \leq 1$. Ergibt sich aufgrund der Stichprobenwerte für t der Wert $\hat{t} = T(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$, so wird die Hypothese H_o mit der Wahrscheinlichkeit $\phi(\hat{t})$ abgelehnt.

Meistens wird ϕ eine "nicht randomisierte" Testfunktion sein, d.h. ϕ kann nur die Werte 0 und 1 annehmen. Dann heißt z.B. $\phi(\hat{t}) = 1$, daß die Entscheidung: "H_o wird abgelehnt" mit Sicherheit getroffen wird. Dies bedeutet aber nicht, daß die Hypothese H_o auch wirklich nicht zutrifft. Sondern je nach Wahl von ϕ, T, der Art der Verteilungsfunktion von X und vor allem je nach dem wahren Wert von θ wird eine Fehlentscheidung mehr oder weniger wahrscheinlich sein.

Ist $\tilde{F}(t \| \theta)$ die Verteilungsfunktion der zufälligen Variablen $T = T(X_1, \ldots, X_n)$, so ist $\phi(T)$ eine zufällige Variable, deren Verteilung von θ abhängt. Der Erwartungswert

$$E_\theta(\phi) = \int \phi(t) d\, \tilde{F}(t \| \theta) \qquad (1)$$

gibt somit die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Hypothese H_o abgelehnt wird, wenn θ der wahre Parameter ist. Man nennt (1) die Gütefunktion $g_\phi(\theta)$ des Tests ϕ.

$$g_\phi(\theta) := E_\theta(\phi) \tag{2}$$

Ein Ziel der Testtheorie ist es nun, eine Testfunktion ϕ^* zu finden, so daß $g_{\phi^*}(\theta)$ möglichst "günstige" Eigenschaften hat. Zum Beispiel wird meistens gefordert, daß für ein vorgegebenes α mit $0 < \alpha < 1$ gilt:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{a)} & g_{\phi^*}(\theta) \leq \alpha & : \theta \in H_o \\ \text{b)} & g_{\phi^*}(\theta) = \sup_{\phi \in \Lambda} \{ g_\phi(\theta) \} & \theta \notin H_o \end{array}\right\} \tag{3}$$

Dabei ist $\Lambda = \{ \phi \mid 0 \leq \phi \leq 1, g_\phi(\theta) \leq \alpha \text{ für } \theta \in H_o \}$

Im allgemeinen wird es eine solche Testfunktion ϕ^* nicht geben. Nur für spezielle Hypothesen (z.B. $H_o := (-\infty, \theta_o]$, $H_1 := (\theta_o, +\infty)$) und spezielle Verteilungsfunktionen $\tilde{F}(t \| \theta)$ (z.B. Verteilungen mit monotonen Dichtequotienten) sind Testfunktionen ϕ^*, die (3) erfüllen, angegeben worden.

Der Anstoß zu dieser Arbeit war nun, nicht mehr von speziellen Hypothesen und nicht mehr von speziellen Optimalitätskriterien für die Gütefunktion auszugehen und dann nach passenden Tests zu suchen, sondern grundsätzlich zu fragen: Welche Eigenschaft muß eine Funktion $g(\theta)$ besitzen, damit sie die Gütefunktion eines Tests ϕ ist, wenn die zugrundeliegende Variable T nach $\tilde{F}(t \| \theta)$ verteilt ist?

Die dabei auftretenden mathematischen Schwierigkeiten sind aber so groß, daß es naheliegend war, dieses Problem erst mit einer möglichst einfachen Funktion $\tilde{F}(t \| \theta)$ zu untersuchen. Da eine der am häufigsten angewandten Stichprobenfunktionen, nämlich $T(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ für

große n bei unabhängigen Stichproben aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes annähernd normal verteilt ist und die Normalverteilung mathematisch leicht zugänglich ist, bot es sich an, das gestellte Problem für den Fall zu untersuchen, daß T nach der Normalverteilung $N(\theta,\sigma^2)$ verteilt ist.

Aus (1) und (2) ergibt sich:

$$g_\phi(\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\, e^{-\frac{(t-\theta)^2}{2\sigma^2}}\, dt \qquad (4)$$

Die Fragen lauten nun:

Wann existiert zu einem vorgegebenen $g(\theta)$ ein meßbares $\phi(t)$ mit $0 \leq \phi \leq 1$, so daß für alle θ mit $-\infty < \theta < +\infty$ erfüllt ist? Welche Eigenschaften besitzt g in Abhängigkeit von ϕ, θ und σ^2?
Ist ϕ eindeutig? Wie läßt sich ϕ bestimmen?

Bei der Analyse dieser Fragen zeigt sich, daß der Parameter θ vor dem Parameter σ^2 ausgezeichnet ist. θ tritt in charakteristischer Weise wieder als Variable von Testfunktionen auf. Da die ursprüngliche Stichprobenvariable X nicht mehr verwendet wird, war es sinnvoll, von vornherein anstelle von θ die Bezeichnung x zu verwenden und so den doppelten Charakter dieser Größe als Parameter und als Variable zu unterstreichen.
Weiter war es notwendig, zu Beginn für $\phi(t)$ jede meßbare Funktion zuzulassen, vorausgesetzt allein, daß das Integral (4) existiert. Erst im Lauf der Untersuchung kann dann die Schar der betrachteten Funktionen auf beschränkte, nicht-negative und schließlich auf Testfunktionen eingeschränkt werden.

Damit lautet unser Grundproblem endgültig:
Es sei die meßbare Funktion g(x) gegeben. Welche Eigenschaften muß g besitzen, damit ein ϕ existiert, so daß für alle x gilt:

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\, e^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}}\, dt \qquad (5)$$

Welche funktionalen Zusammenhänge bestehen zwischen g und ϕ? Wie läßt sich ϕ bestimmen?

Dieses Problem wurde in der Arbeit {4} von Doetsch bereits mit Hilfe von Fouriertransformationen unter der Voraussetzung gelöst, daß g(x) und $\phi(t)$ quadratisch integrable Funktionen sind. Diese Bedingungen sind jedoch in der Testtheorie im allgemeinen nicht erfüllt. Wählt man z.B. einen einseitigen Annahmebereich, so ist für ein geeignetes τ $\phi(t) = 1$ für alle $t \leq \tau$. Dennoch lassen sich die Ergebnisse dieser Arbeit durch geeignete Transformationen auf unser Problem übertragen. Dies ist in § 4 geschehen. Leider sind die dort abgeleiteten Formeln so unübersichtlich, daß aus ihnen kaum praktische Schlüsse über die Gestalt von $\phi(t)$ gezogen werden können.

Wir sind daher einen anderen Weg gegangen. Die entscheidende Überlegung in § 2 war, daß, wenn es überhaupt für ein $\sigma_o > 0$ eine Lösung $\phi(t,\sigma_o^2)$ von (5) gibt, es dann auch zu jedem σ mit $0 < \sigma < \sigma_o$ eine Lösung $\phi(t,\sigma^2)$ gibt, die (5) löst. g(x) läßt sich eineindeutig dieser Schar $\{\phi(t,\sigma^2) \mid 0 < \sigma < \sigma_o\}$ zuordnen. Nun lassen sich für alle Funktionen der Schar, für die $\sigma < \sigma_o$ ist, wesentlich bessere mathematische Eigenschaften als für $\phi(t,\sigma_o^2)$ selbst nachweisen. So ist z.B. für jedes σ mit $0 < \sigma < \sigma_o$ $\phi(t,\sigma^2)$ eine ganze analytische Funktion von t. Daher kann man alle Elemente der Schar mit $\sigma < \sigma_o$ wesentlich leichter angeben als $\phi(t,\sigma_o^2)$ selbst.

In § 1 wird gezeigt, daß, wenn es überhaupt eine Lösung $\phi(t)$ von (5) gibt, diese fast überall eindeutig ist. Weiter untersuchen wir das Integral (5) bei vorgegebenem $\phi(t)$ als Funktion von x und σ^2 .Im § 2 werden wir die Schar

$\{ \phi(t,\sigma^2) \}$ definieren und die wesentlichsten Eigenschaften der Schar aus der Funktionalgleichnung

$$\phi(x,\sigma_1^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_2^2-\sigma_1^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t,\sigma_2^2)\ e^{-\frac{(t-x)^2}{2(\sigma_2^2-\sigma_1^2)}}\ dt$$

für $0 < \sigma_1^2 < \sigma_2^2$, der die Elemente der Schar gehorchen, ableiten.

In § 3 beweisen wir, daß die Ungleichung

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\, g(x)\right| = |g^{(n)}(x)| \leq K\, \frac{\sqrt{n!}}{\sigma_o^n} \tag{6}$$

notwendig ist, damit sich (5) für $\sigma = \sigma_o$ mit einer beschränkten Funktion $\phi(t,\sigma_o^2)$ lösen läßt. Die Ungleichung ist umgekehrt hinreichend dafür, daß es zu jedem $0 < \sigma < \sigma_o$ eine beschränkte Funktion $\phi(t,\sigma^2)$ gibt, die (5) löst. Ist (6) erfüllt, so ist $\phi(t,\sigma^2)$ für $\sigma < \sigma_o$ durch die absolut und gleichmäßig konvergente Reihe

$$\phi(x,\sigma^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(2n)}(x)\ \sigma^{2n}}{n!\ 2^n}\ (-1)^n$$

gegeben.

Dagegen ist die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(g^{(n)}(x_o))^2 \sigma^{2n}}{n!} < \infty \tag{7}$$

für ein geeignetes reelles x_o notwendig und hinreichend dafür, daß ein $\phi(t,\sigma^2)$ existiert, das erstens (5) erfüllt und für welche zweitens

$$\phi(t,\sigma^2) \cdot e^{-\frac{(t-x_o)^2}{2\sigma^2}}$$

quadratisch integrabel ist. Ist (7) gegeben, so läßt sich $\phi(t,\sigma^2)$ durch die im quadratischen Mittel konvergierende Reihe

$$\phi(t,\sigma^2) = e^{\frac{(t-x_o)^2}{4\sigma^2}} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(x_o)\ \sigma^{2n}}{n!}\ h_n\left(t-x_o, \frac{1}{2\sigma^2}\right)\right)$$

darstellen. Dabei sind die Funktionen $h_n(t,\alpha)$ die Hermitischen Orthogonalfunktionen. D.h.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t,\alpha)\cdot h_m(t,\alpha)dt = \begin{cases} 0 \text{ für } n \neq m \\ \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot n!(2\alpha)^n \text{ für } n = m \end{cases}$$

Das Thema von § 4 haben wir bereits angedeutet. Außerdem werden wir in diesem § mit Hilfe der Theorie der charakteristischen Funktionen notwendige und hinreichende Bedingungen angeben, damit (5) mit einer Testfunktion $\phi(t,\sigma^2)$ mit $0 \leq \phi(t,\sigma^2) \leq 1$ zu lösen ist.
In § 5 schließlich untersuchen wir die erhaltenen Funktionen auf Robustheit und Stabilität.

Allgemeine Bezeichnungen und Voraussetzungen

1) Alle betrachteten Funktionen werden als meßbar vorausgesetzt bezüglich des σ-Körpers B_1 der Borelschen Mengen im $\mathbb{R}_1$. Als Maß über diesem Körper verwenden wir das Lebesgue-Maß. Alle auftretenden Integrale werden als Lebesgue-Integrale aufgefaßt. Eine Funktion wird in dieser Arbeit nur dann integrabel genannt, wenn ihr Integral eigentlich existiert.

2) Die Variablen x und t werden stets im selben Sinne verwendet. Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, auch im zusammenhängenden Text die Schreibweisen $\phi(t,\sigma^2)$ und $\phi(x,\sigma^2)$ gemeinsam zu verwenden. Die Variable y wird den Fouriertransformierten vorbehalten.

3) Wird im Text von der Schar $\{\phi(t,\sigma^2)\}$ gesprochen, so wird stillschweigend vorausgesetzt, daß es sich dabei um die Schar zu einer bestimmten fest vorgegebenen Funktion g(x) handelt.

4) Für die Gleichung

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\, e^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}}\, dt \qquad (5)$$

führen wir eine Abkürzung ein, die wir so motivieren:

Ist $\phi(t)$ z.B. integrabel, so kann g(x) aufgefaßt werden als Faltung von $\phi(t)$ und $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$.

$$g(x) = \left(\phi(t) * \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\right)(x).$$

Da der zweite Faktor die Dichte der $N(0,\sigma^2)$ ist, liegt es nahe, dafür zu schreiben

$$g(x) = (\phi(t) * N(0,\sigma^2))(x).$$

Diesen Ausdruck kürzen wir nun in der symbolischen Form ab:

$$g(x) = \phi(\cdot) * N(x,\sigma^2). \tag{8}$$

Hier tritt die doppelte Funktion von x als Parameter und als Variable deutlich zum Ausdruck.

Auch wenn $\phi(t)$ eine beliebige meßbare Funktion ist, die (5) erfüllt, werden wir (5) in der symbolischen Form (8) schreiben; (8) wird also lediglich als Abkürzung von (5) verwendet.

Wir unterscheiden noch zwei Fälle:
Halten wir $\phi(t)$ fest und untersuchen in (5) das Integral als Funktion von x und σ^2, so schreiben wir auch:

$$g(x,\sigma^2) = \phi(\cdot) * N(x,\sigma^2)$$

Halten wir dagegen $g(x)$ fest und untersuchen ϕ auf seine funktionale Abhängigkeit von $g(x)$ und σ^2, so schreiben wir dafür:

$$g(x) = \phi(\cdot,\sigma^2) * N(x,\sigma^2)$$

$$:= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t,\sigma^2)\, e^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}}\, dt$$

5) Wird eine neue Größe A durch eine bereits eingeführte Größe B definiert, so schreiben wir A: = B oder B = :A. Im übrigen werden die in der mathematischen

Literatur üblichen Bezeichnungen verwendet. So verwenden wir die Symbole L_1 bzw. L_2 für die Räume der Lebesgue-integrablen bzw. quadratisch integrablen Funktionen $f:(\mathbb{R},B_1) \to (\mathbb{R},B_1)$; $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ für die Mengen der natürlichen, reellen bzw. komplexen Zahlen. B_1 bzw. B_2 ist der σ-Körper der Borelschen Mengen im $\mathbb{R}_1$ bzw. $\mathbb{R}_2$.

6) Da auf der Schreibmaschine nicht zwei verschiedene Symbole für ε und ϵ zur Verfügung standen, wurde in dieser Arbeit das Symbol ε nur als "Element"-Zeichen verwendet, z.B. $n \varepsilon \mathbb{N}$. Zur Kennzeichnung kleiner positiver Zahlen wurde das Zeichen δ gebraucht, so z.B. bei $|x| \leq \delta$.

7) Innerhalb der einzelnen Paragraphen sind Formeln, Definitionen und Sätze ohne Rücksicht auf ihren Charakter fortlaufend numeriert. (16) ist die Formel (16) des gleichen Paragraphen, während mit § 3 (16) die Formel (16) im vorangehenden oder folgenden Paragraphen 3 bezeichnet wird.

8) Hinweise auf das Literaturverzeichnis werden durch $\{\cdot\}$ angegeben.

§ 1 Vorbereitende Sätze

In diesem Paragraphen leiten wir einige Sätze ab, die wir unmittelbar aus der Gleichung

$$g(x) = \phi(\cdot) * N(x,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) e^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}} dt \qquad (1)$$

folgern können. Wir beweisen zuerst den grundlegenden Satz:

Satz:
Wenn das Integral (1) bei einem festen $\sigma^2>0$ für alle reellen x existiert, dann ist $\phi(t)$ durch $g(x)$ bis auf eine Menge vom Maß Null eindeutig bestimmt. (2)

Beweis:

Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus dem folgenden Satz aus Witting [12], Seite 154;

"$\mathfrak{M} = \{W_\vartheta, \vartheta \in \Theta\}$ sei eine k-parametrige Exponentialfamilie in T(x) und ϑ. Dann ist die k-dimensionale suffiziente Statistik $T(x) = \{T_1(x), \ldots, T_k(x)\}$ vollständig für $\vartheta \in \Theta$, falls Θ ein nicht ausgeartetes k-dimensionales Intervall enthält". (3)

Schreibt man

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{\frac{x\cdot t}{\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

so sieht man, daß die betrachteten Normalverteilungen eine eindimensionale Exponentialfamilie mit dem Parameter $\vartheta = \frac{x}{\sigma^2}$ und der Statistik $T(t) = t$ bilden.

Da der in (3) genannte Parameterraum Θ hier aus dem $\mathbb{R}_1$ besteht, ist Satz (3) anwendbar und liefert die Behauptung.

Bemerkung:
Existieren $g_1(x) = \phi_1(\cdot) * N(x,\sigma^2)$ und $g_2(x) = \phi_2(\cdot) * N(x,\sigma^2)$ für ein festes $\sigma \geq 0$ und für alle reellen x und gilt:

$$g_1(x_n) = g_2(x_n) \quad , \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{4}$$

für eine sich im Endlichen häufende Punktfolge, so gilt ebenfalls $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ fast überall.
denn in Satz (6) wird gezeigt, daß $g_1(x)$ und $g_2(x)$ ganze analytische Funktionen sind. Aus dem Eindeutigkeitssatz über analytische Funktionen folgt aus (4) nämlich $g_1(x) = g_2(x)$ für alle x und damit $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ fast überall wegen Satz (2).
Wie das Beispiel $g(x) = \cos x$ zeigt, ist es sehr wohl möglich, daß $g_1(x_n) = g_2(x_n)$ für eine sich im Unendlichen häufende Punktfolge gilt, dennoch aber $\phi_1(t)$ fast überall ungleich $\phi_2(t)$ ist.

Um weitere Differentiationseigenschaften von g(x) abzuleiten, benötigen wir noch den folgenden

Hilfssatz:
Es seien $\phi(t)$ und h(t) meßbare reelle Funktionen, für die das Integral

$$f(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \cdot e^{x\,h(t)}\,dt \tag{5}$$

für alle x aus einem Bereich B der komplexen Ebene eigentlich existiert. Dann ist f(x) eine im Inneren B_0 von B analytische Funktion. f(x) kann im Innern von B beliebig oft unter dem Integral nach x differenziert werden.

Beweis:
Satz (5) wird bei Witting {12}, Seite 58 unter der Voraussetzung bewiesen, daß $\phi(t)$ beschränkt und $e^{x\,h(t)}$ die Dichte einer Exponentialverteilung ist. Der dort gegebene Beweis läßt sich ohne Schwierigkeiten auf den allgemeineren Teil (5) ausdehnen. Wir verzichten deshalb auf einen gesonderten Beweis.

Damit können wir die Definition der Funktion $g(x,\sigma^2)$ auch auf komplexe Werte erweitern. Es sei nun $z = x+iy$, $\tau = \sigma+i\delta$ mit reellen x,y,σ,τ. $\mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen.

Satz:

Es sei $\phi(t)$ eine reelle meßbare Funktion, für welche die durch das folgende Integral definierte Funktion

$$g(z,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau \cdot 2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \cdot e^{-\frac{(z-t)^2}{2\tau}} \, dt$$

für mindestens ein reelles $\tau = \sigma_o^2 > 0$ und alle reellen $z = x$ existiert. (Für $\sqrt{\tau}$ ist der Hauptzweig zu nehmen.

Dann gilt:

a) $g(z,\tau)$ existiert für alle komplexen $z \in \mathbb{C}$ und alle komplexen $\tau \in B$. Dabei ist der Bereich B wie folgt definiert: (6)

$B := \{\tau=\sigma+i\delta \mid \sigma>0\}$, falls ϕ beschränkt ist.

$B := \{\tau=\sigma+i\delta \mid (\sigma - \frac{\sigma_o^2}{2})^2 + \delta^2 \leq \frac{1}{4}\sigma_o^4\} \setminus \{0\}$

falls ϕ unbeschränkt ist.

b) für festes reelles x ist $g(x,\tau)$ eine im Innern $\overset{o}{B}$ von B analytische Funktion von τ.

c) für festes reelles $\sigma^2 \in B$ ist $g(z,\sigma^2)$ eine ganze analytische Funktion von z.

d) $g(z,\tau)$ kann in $\mathbb{C} \times \overset{o}{B}$ beliebig oft unter dem Integral nach z und nach τ differenziert werden.

Beweis:

a) Zur Abkürzung führen wir für reelle von t unabhängige Funktionen die Buchstaben c, c', c'', d, d', d'', x' ein. Dann gilt:

$$\frac{(z-t)^2}{\tau} = \frac{(z-t)^2 \cdot \bar{\tau}}{|\tau|^2} = \frac{(x+iy-t)^2\,(\sigma - i\delta)}{\sigma^2+\delta^2}$$

$$= \frac{\sigma\cdot(x-t)^2 + 2y\,\delta\,(x-t)}{\sigma^2+\delta^2} + i\,(c + c't + c''t^2) + d$$

$$= \frac{\sigma}{\sigma^2+\delta^2}\cdot\left(x + \frac{y\delta}{\sigma} - t\right)^2 + i\,(c + c't + c''t^2) + d'$$

$$= \frac{\sigma}{\sigma^2+\delta^2}\,(x'-t)^2 + i\,(c + c't + c''t^2| + d' \ .$$

Daher ist

$$|\phi(t)\cdot e^{-\frac{(z-t)^2}{2\tau}}| = d''\cdot|\phi(t)|\cdot e^{-\frac{\sigma(x'-t)^2}{2(\sigma^2+\delta^2)}}$$

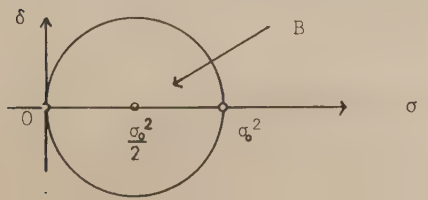
Nach dem Majorantenkriterium existiert das Integral $g(z,\tau)$ falls gilt:

$$\frac{\sigma}{\sigma^2+\delta^2} \geqslant \frac{1}{\sigma_0^2}$$

Dies ist äquivalent mit

$$(\sigma - \frac{\sigma_0^2}{2})^2 + \delta^2 \leqslant \frac{\sigma_0^4}{4}$$

Dadurch ist aber gerade der Bereich B definiert und der Teil 2 von Behauptung a) bewiesen.



Der erste Teil von a) folgt sofort aus dem zweiten Teil, weil bei beschränktem ϕ für σ_o^2 jede positive Zahl gewählt werden kann.

b) Wegen Teil a) und Hilfssatz (5) ist

$$f(\tau) := \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \cdot e^{-\frac{z\,(x-\tau)^2}{2}}\, dt$$

analytisch im Gebiet $\{\tau \mid \tau^{-1} \in \overset{o}{B}\}$.
Daher ist $f(\frac{1}{\tau})$ analytisch in B. Daher ist auch

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \cdot f(\tfrac{1}{\tau}) = g(x,\tau)$$

analytisch in $\overset{o}{B}$, wenn für $\sqrt{\tau}$ der Hauptzweig genommen wird.

c) und d) werden nach einigen Umformungen leicht mit Hilfe von a) und Hilfssatz (5) bewiesen.

Wir wollen nun eine Reihe naheliegender Integrationseigenschaften von g(x) herleiten. Dazu seien wieder - sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird - alle auftretenden Größen und Funktionen reell.

Satz:

a) Ist $\phi(t) \geq 0$, so ist $g(x) \geq 0$, und zwar ist $g(x) > 0$, falls $\phi(t)$ nicht fast überall Null ist.

b) Ist $|\phi(t)| \leq K$, so ist $|g(x)| \leq K$, und zwar ist $|g(x)| < K$, falls nicht $\phi(t)$ fast überall gleich K ist. (7)

c) Ist $\phi(t) \in L_i$, so ist $g(x) \in L_i$, $i = 1,2$.
Darüberhinaus ist g(x) beschränkt.

d) Die Umkehrung der Aussagen a), b), c) gilt nicht.

Wegen a) - c) sagen wir auch: g(x) hat die gleichen Integrationseigenschaften wie $\phi(t)$.

Beweis:
a) und b) sind evident.

c) 1.) Es sei $\phi \in L_1$. Dann ist auch $|\phi| \in L_1$ und

$$h(x) := |\phi(\cdot)| * N(x, \sigma^2)$$

gehört als Faltung von zwei positiven, L_1-integrablen Funktionen selbst zu L_1. Da h(x) Majorante von g(x) ist, folgt $g(x) \in L_1$. Wegen

$$|g(x)| \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{+\infty}^{-\infty} |\phi(t)| dt < +\infty$$

folgt die Behauptung in diesem Fall.

2.) Sei $\phi \in L_2$. Dann verwenden wir die beiden folgenden Sätze aus der Theorie der Fouriertransformation im L_2. Dabei bezeichnen wir die Fouriertransformierte von f mit $F\{f\}$

$$F\{f\} = \underset{\alpha \to \infty}{\text{Limes im Mittel}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{iyx} \cdot f(x)\, dx$$

und ihre Inverse mit

$$F^{-1}\{f\} = \frac{1}{2\pi} \cdot \underset{\alpha \to \infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-iyx} \cdot f(x)\, dx. \qquad (8)$$

Dann gilt der
Eindeutigkeitssatz:

Die Fouriertransformation bildet den L_2 eineindeutig auf sich ab. (9)

Faltungssatz:
Gehören f, g, $F\{f\} \cdot F\{g\}$ zu L_2, dann gehört die Faltung $f * g$ von f und g zu L_2 und es gilt $F\{f * g\} = F\{f\} \cdot F\{g\}$. (10)

Zum Beweis siehe etwa Doetsch{4}, Seite 286,287

Mit beiden Sätzen ist die Behauptung leicht zu beweisen:

Da $F\{ \frac{e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \} = e^{-\frac{\sigma^2}{2} \cdot y^2}$ beschränkt ist und wegen (9) $F\{\phi\} \in L_2$ ist, ist auch

$$F\{\phi\} \cdot F\{ \frac{e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \} \in L_2 .$$

Aus (10) folgt dann, daß $g(x) = (\phi(t) * \frac{e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}})(x) \in L_2$ ist.

Bezeichnen wir mit $||\cdot||$ die Norm im L_2, so folgt aus der Schwarzschen Ungleichung

$$|g(x)| \leq ||\phi|| \cdot || \frac{e^{-\frac{(x-t)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} ||$$

$$= ||\phi|| \cdot (4\sigma^2\pi)^{-\frac{1}{4}} < +\infty .$$

Zum Beweis von d) geben wir Gegenbeispiele an,

Beispiel 1

Sei $\phi(t) = t^2 - 1$, dann ist

$g(x) = \phi(\cdot) * N(x, \sigma^2) = x^2 + \sigma^2 - 1.$

$\phi(t)$ ist im Intervall $(-1, +1)$ negativ. Ist $\sigma^2 > 1$, so ist $g(x)$ überall positiv.

Weitere Gegenbeispiele ergeben sich als Spezialfälle aus den folgenden beiden Sätzen.

Hilfssatz:
Ist b eine beliebige komplexe Zahl, a eine komplexe Zahl mit positivem Realteil, d.h. $a = r \cdot e^{i\phi}$ mit $0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}$, so gilt

$$\int_{+\infty}^{-\infty} e^{-a(x+b)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{r}} \cdot e^{-i\frac{\phi}{2}} \qquad (11)$$

Beweis:

Ist a = 1, b komplex, dann folgt die Behauptung aus einem Beispiel bei Behnke/Sommer{ 3}, Seite 219. Für ein komplexes a wird die Behauptung leicht mit Hilfe des Residuensatzes bewiesen. Wir gehen nicht weiter darauf ein.

Aus dem folgenden Satz werden wir durch geeignete Wahl der Koeffizienten fast alle weiteren Beispiele gewinnen.

Satz:
Es seien a und b komplexe Zahlen; dabei sei der Realteil von $a > -\frac{1}{\sigma_o^2}$. Weiter sei

$$\phi(t) = e^{-\frac{1}{2}(at^2 + 2bt)}.$$

Dann ist für alle σ^2 mit $0 < \sigma^2 < \sigma_o^2$: (12)

$$g(x,\sigma^2) = \phi(\cdot) * N(x,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2 a}} e^{+\frac{\sigma^2 b^2}{2(1+\sigma^2 a)}} e^{-\frac{ax^2+2bx}{2(1+\sigma^2 a)}}$$

Dabei ist die Wurzel mit positivem Realteil zu wählen.

Beweis:

Es ist $g(x, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{at^2+2bt}{2}} dt.$

Nun ist $(t - x)^2 + \sigma^2(at^2 + 2bt) =$

$$(1 + \sigma^2 a)\left(t + \frac{\sigma^2 b - x}{1+\sigma^2 a}\right)^2 + \frac{\sigma^2 a x^2 + 2b\sigma^2 x}{1+\sigma^2 a} - \frac{\sigma^4 b^2}{1+\sigma^2 a}$$

Nach Voraussetzung über a und σ^2 ist der Realteil von $1 + a\sigma^2$ positiv. Nach Hilfssatz (11) folgt die Behauptung nach Integration über t.

Beispiel 2:

Wir wählen in (12) $b = 0$, $a = -\alpha - i\beta$ mit einem positiven α und β. Dann ist

$$\phi(t) = e^{\frac{1}{2}(\alpha+i\beta)t^2}$$

Zerlegen wir in (12) den Exponenten $\frac{a}{1+\sigma^2 a} = \frac{a(1+\sigma^2\bar{a})}{|1+\sigma^2 a|^2}$

in Real- und Imaginärteil, so erhalten wir für alle mit $0<\sigma^2<\frac{1}{\alpha}$:

$$g(x,\sigma^2) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}\left\{\frac{\alpha-\sigma^2(\alpha^2+\beta^2)}{(1-\alpha\sigma^2)^2+\beta^2\sigma^4}\right\} + i\frac{x^2}{2}\left\{\frac{\beta}{(1-\alpha\sigma^2)^2+\beta^2\sigma^4}\right\}}}{\sqrt{1-\sigma^2(\alpha+i\beta)}}$$

Wir sehen daraus:
Da $\beta>0$ ist, oszilliert $\phi(t)$ bei wachsenden t mit quadratisch wachsender Frequenz. Gleichzeitig wächst die

Amplitude wie $e^{\frac{\alpha t^2}{2}}$. $g(x,\sigma^2)$ oszilliert ebenfalls mit quadratisch wachsender Frequenz. Die Amplitude ändert sich jedoch charakteristisch in Abhängigkeit von σ^2:

1) $0 < \sigma^2 < \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$: $|g(x,\sigma^2)|$ wächst wie $e^{\gamma x^2}$ mit positivem γ. γ nimmt monoton mit σ^2 ab.

2) $\sigma^2 = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} =: \tilde{\sigma}^2$: $g(x,\tilde{\sigma}^2) = c \cdot e^{i \frac{\alpha^2+\beta^2}{2\beta} x^2}$ mit einer komplexen Konstanten c. $|g(x,\tilde{\sigma}^2)|$ ist also beschränkt!

3) $\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} < \sigma^2 < \frac{1}{\alpha}$: $|g(x,\sigma^2)|$ fällt wie $e^{-\kappa x^2}$ ab, mit positivem κ. $|g(x,\sigma^2)|$ ist beschränkt, einfach und quadratisch integrabel.

Zerlegt man $g(x,\sigma^2)$ in Real- und Imaginärteil, so erhält man entsprechende Aussagen für reelle Funktionen. Durch geeignete Wahl von α und β kann auch die Konstante $\sqrt{1-\sigma^2(\alpha+i\beta)}$ reell gehalten werden. Im Fall 2) ist weder Real- noch Imaginärteil von $g(x,\sigma^2)$ absolut oder quadratisch Lebesgue-integrabel, obwohl sie Riemann-integrabel sind.
Denn wäre z.B. $\cos x^2 \in L_1$, dann wäre auch, wie man durch eine Integraltransformation einsieht, $\sin x^2 \in L_1$. Da $(\cos x^2)^2 \leq |\cos x^2|$ und $(\sin x^2)^2 \leq |\sin x^2|$, ist, wäre auch $(\cos x^2)^2$ und $(\sin x^2)^2 \in L_1$, was wegen $(\cos x^2)^2 + (\sin x^2)^2 = 1$ unmöglich ist.

§ 2 Die Testschar

Im vorigen Paragraphen haben wir in der Gleichung

$$g(x,\sigma^2) = \Phi(\cdot) * N(x,\sigma^2)$$

$\Phi(t)$ als eine von σ^2 unabhängige Funktion aufgefaßt. Dafür war $g(x,\sigma^2)$ von σ^2 und Φ abhängig. Wir drehen diese Betrachtung jetzt um, fassen $g(x)$ als eine gegebene von σ^2 und Φ unabhängige Funktion auf, lassen σ^2 variieren und müssen daher statt mit $\Phi(t)$ mit $\phi(t,\sigma^2)$ arbeiten. Unser neues Problem lautet:

Grundproblem:
Gesucht ist eine meßbare Funktion $\Phi(t,\sigma^2)$, die für gegebenes $g(x)$ die Gleichung:

$$g(x) = \Phi(\cdot,\sigma^2) * N(x,\sigma^2) \tag{1}$$

für mindestens ein $\sigma^2>0$ und alle reellen x erfüllt.

Der folgende Satz liefert uns einen wichtigen Zugang zu unserem Problem:

Satz:
Für ein festes $\sigma_o^2>0$ sei $\Phi(t)$ Lösung der Gleichung

$$g(x) = \Phi(\cdot) * N(x,\sigma_o^2).$$

Dann existiert für jedes σ mit $0<\sigma<\sigma_o$ eine Funktion $\Phi(t,\sigma^2)$ mit

$$g(x) = \Phi(\cdot,\sigma^2) * N(x,\sigma^2).$$

Dabei ist für $0<\sigma<\sigma_o$

$$\Phi(x,\sigma^2) = \Phi(\cdot) * N(x,\sigma_o^2-\sigma^2)$$

(2)

Beweis:
Wir definieren für ein festes σ mit $0 < \sigma < \sigma_0$

$$f(s,t) := \frac{\Phi(t)}{2\pi\sqrt{\sigma^2(\sigma_0^2-\sigma^2)}} \cdot e^{-\frac{(t-s)^2}{2(\sigma_0^2-\sigma^2)} - \frac{(s-x)^2}{2\sigma^2}}$$

Dann gilt
a) $f(s,t)$ ist eine B_2 meßbare Funktion;

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(s,t)|\,ds = \frac{|\Phi(t)|}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma_0^2}} = f(t)$

Man erhält diese Gleichung, wenn man etwa das Integral über das Produkt der beiden e-Funktionen auffaßt als Faltung der Dichten einer $N(t,\sigma_0^2-\sigma^2)$ und einer $N(x-t,\sigma^2)$.

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt < +\infty$ nach Voraussetzung über $\Phi(t)$.

Aus a),b),c) und dem anschließend zitierten Satz (3) folgt, daß $|f(s,t)|$ und damit $f(s,t)$ selbst L_2-integrabel ist. Daher können wir mit dem Satz von Fubini (4) schließen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s,t)ds\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s,t)dt\right) ds.$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht $g(x)$, auf der rechten Seite $\Phi(\cdot,\sigma^2) * N(x,\sigma^2)$.

Wir haben im Beweis die beiden folgenden Sätze aus Halmos {6} , Seite 147/148 verwendet:

Die gemeinsamen Voraussetzungen sind:
(X,S,μ) und (Y,T,ν) sind σ-finite Maßräume. $\mu\times\nu$ ist das Produktmaß auf $S\times T$. Dann gilt:

1) Für jede nicht negative meßbare Funktion h auf $X\times Y$ gilt

$$\int h\, d(\mu\times\nu) = \int\int h\, d\mu d\nu = \int\int h\, d\nu d\mu \qquad (3)$$

2) Der Satz von Fubini:
Ist h eine integrable Funktion auf X×Y, dann ist fast jeder Schnitt von h integrabel. Sind die Funktionen f und g definiert durch $f(x) = \int h(x,y)d\nu(y)$ und $g(y) = \int h(x,y)d\mu(x)$, dann sind f und g integrabel und es gilt:

$$\int h\,d(\mu\times\nu) = \int f\,d\mu = \int g\,d\nu. \qquad (4)$$

Satz (2) motiviert die folgende

Definition:
Ist $0<\sigma_1^2<\sigma_2^2$ und gilt für i = 1,2:

a) $g(x) = \Phi(\cdot,\sigma_i^2) * N(x,\sigma_i^2)$

b) $\Phi(x,\sigma_1^2) = \Phi(\cdot,\sigma_2^2) * N(x,\sigma_2^2-\sigma_1^2)$ (5)

so nennen wir $\Phi(t,\sigma_1^2)$ einen Nachfolger von $\Phi(t,\sigma_2^2)$ und $\Phi(t,\sigma_2^2)$ einen Vorgänger von $\Phi(t,\sigma_1^2)$.

Aus (2) und (5) ziehen wir die wichtige

Folgerung:
Es seien $\phi_1(t)$ und $\phi_2(t)$ zwei meßbare Funktionen, die für i = 1, 2

$$g(x) = \Phi_i(\cdot) * N(x,\sigma_i^2)$$

mit $0<\sigma_1^2<\sigma_2^2$ erfüllen. Dann gilt bis auf eine Menge vom Maß Null: (6)

$$\Phi_1(x) = \Phi_2(\cdot) * N(x,\sigma_2^2-\sigma_1^2).$$

D.h. $\Phi_1(x)$ stimmt fast überall mit dem analytischen Nachfolger $\Phi(t,\sigma_1^2)$ von $\Phi_2(t)$ überein.

Definieren wir noch

$$\phi(x,0) := g(0) \tag{7}$$

so ist(5)b auch für $\sigma_1 = 0$ erfüllt. Wir nennen daher $g(x)$ auch den letzten Nachfolger. Dagegen braucht es einen ersten Vorgänger (zu einem maximalen σ) nicht zu geben, wie wir an Beispielen sehen werden. Stattdessen läßt sich aber eine obere Grenze der σ-Werte definieren durch

$$\left.\begin{aligned}\sigma^2(g) := \sup \{\sigma^2 |\ &\text{Es existiert ein } \Phi(t) \text{ mit} \\ &g(x) = \phi(.) * N(x,\sigma^2)\ \}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Dabei ist $\sigma^2(g) = +\infty$ zugelassen.

Ist $\sigma^2(g)$ endlich und existiert ein $\tilde{\Phi}(t)$ mit

$$g(x) = \tilde{\Phi}(\cdot) * N(x,\sigma^2(g)) \tag{9}$$

so ist $\tilde{\Phi}(t)$ im allgemeinen weder überall eindeutig noch analytisch. Die Vieldeutigkeit läßt sich aber einschränken. In Satz (19) werden wir zeigen, daß - unter der Voraussetzung, daß $\tilde{\Phi}(t)$ existiert - für fast alle t gilt:

$$\lim_{\substack{\sigma\to\sigma(g)\\ \sigma<\sigma(g)}} \Phi(t,\sigma^2) = \tilde{\Phi}(t)$$

Wir definieren daher.

Definition:
Existiert eine Funktion $\tilde{\Phi}(t)$, die (9) erfüllt, dann sei

$$\left.\begin{aligned}\Phi(t,\sigma^2(g)) = \begin{cases}\lim\limits_{\substack{\sigma\to\sigma(g)\\ \sigma<\sigma(g)}} \Phi(t,\sigma^2) & \text{wenn dieser Grenzwert existiert.} \\ \frac{1}{2} & \text{sonst.}\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Da $\tilde{\Phi}(t)$ und $\Phi(t,\sigma^2(g))$ wegen Satz (19) fast überall übereinstimmen, erfüllt $\Phi(t,\sigma^2(g))$ für jedes $0 \leq \sigma_1^2 < \sigma_2^2 = \sigma^2(g)$ die Relationen(5)a und (5)b. Die durch (10) eindeutig festgelegte Funktion $\Phi(t,\sigma^2(g))$ nennen wir den ersten Vorgänger.

Wir fassen die bisher erörterten Punkte in einer Definition und in einem Satz zusammen:

Definition:
Die folgende Schar von Funktion

$$G(g) := \{\Phi(t,\sigma^2) \mid 0 \leq \sigma^2 < \sigma^2(g)\}$$

im Fall der Existenz von $\Phi(t,\sigma^2(g))$:

$$G(g) := \{\Phi(t,\sigma^2) \mid 0 \leq \sigma^2 \leq \sigma^2(g)\} \qquad (11)$$

nennen wir die zu g(x) gehörende Testschar.

Satz:
a) G(g) ist durch g(x) eindeutig bestimmt.

b) Für zwei beliebige Funktionen $\Phi(t,\sigma_1^2)$ und $\Phi(t,\sigma_2^2)$ aus G(g) mit $0 \leq \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \leq \sigma^2(g)$ gilt:

$$\Phi(x,\sigma_1^2) = \Phi(\cdot,\sigma_2^2) * N(x,\sigma_2^2-\sigma_1^2) \qquad (12)$$

c) Für jedes $\Phi(t,\sigma^2)$ mit positivem σ gilt

$$g(x) = \Phi(\cdot,\sigma^2) * N(x,\sigma^2)$$

d) Für jedes $0 \leq \sigma^2 < \sigma^2(g)$ ist $\Phi(t,\sigma^2)$ analytisch.

Uns wird speziell die Zahl $\sigma^2(g)$ und die Funktion $\Phi(t,\sigma^2(g))$ interessieren, falls es sie gibt. Denn ist g(x) die Gütefunktion eines nicht randomisierten Tests $\Phi_0(t)$, der durch einen Annahmebereich bestimmt wird, so kann $\Phi_0(t)$ nur die Werte 0 und 1 annehmen. Sehen wir vom trivialen Fall, daß $\Phi_0(t)$ konstant ist, ab, so ist $\Phi_0(t)$ unstetig, kann

also selbst kein Nachfolger einer anderen Funktion $\phi(t,\sigma^2)$ sein. $\phi_o(t)$ ist damit fast überall gleich $\phi(t,\sigma^2(g))$.

Aus § 1, Satz (7) ziehen wir noch die

Folgerung:
Ist $0 \leq \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \leq \sigma^2(g)$, so hat der Nachfolger $\phi(t,\sigma_1^2)$ dieselben Integrationseigenschaften wie sein Vorgänger $\phi(t,\sigma_2^2)$. Ist $\phi(t,\sigma_2^2) \in L_1$ oder $\in L_2$, so ist $|\phi(t,\sigma_1^2)|$ beschränkt.
Eine Umkehrung dieses Satzes gilt nicht. (13)

Ist daher zum Beispiel für ein festes positives σ_o $0 \leq \phi(t,\sigma_o^2) \leq 1$, dann gilt auch für jedes kleinere positive σ: $0 \leq \phi(t,\sigma^2) \leq 1$. Wir können daher umgekehrt nach dem größten σ fragen, für welches $0 \leq \phi(t,\sigma^2) \leq 1$ gilt. Diese Überlegung legt es nahe, die Schar G(g) noch weiter zu unterteilen:

Definition:

$$G_o(g) := \{\phi(t,\sigma^2) \in G(g) \mid 0 \leq \phi(t,\sigma^2) \leq 1\}$$

$$G_c(g) := \{\phi(t,\sigma^2) \in G(g) \mid |\phi(t,\sigma^2)| \leq K(\sigma^2), \text{ d.h. } \phi(t,\sigma^2) \text{ ist bei festem } \sigma^2 \text{ als Funktion von t beschränkt.}\}$$

$$G_i(g) := G(g) \cap L_i \qquad i = 1,2.$$

(14)

Weiter definieren wir:

$$\sigma_o(g) := \sup\{\sigma \mid \exists\ \phi(t,\sigma^2) \in G_o(g)\}$$
$$\sigma_c(g) := \sup\{\sigma \mid \exists\ \phi(t,\sigma^2) \in G_c(g)\}$$
$$\sigma_i(g) := \sup\{\sigma \mid \exists\ \phi(t,\sigma^2) \in G_i(g) \quad i = 1, 2.\}$$

Wir nennen diese Zahlen die Klassengrenzen oder die kritischen Werte. Wenn es zu einem Wert $\sigma^2 > 0$ eine Funktion

$\phi(t,\sigma^2)$ gibt, dann wollen wir sagen, σ^2 wird angenommen.

Wir wollen in den folgenden Sätzen das Verhalten der Schar an den Klassengrenzen untersuchen.

Aus Satz (13) und Definition (14) ziehen wir sofort die

Folgerung:
Es gilt: $\text{Max}\ \{\sigma_o(g), \sigma_1(g), \sigma_2(g)\} \leq \sigma_c(g) \leq \sigma(g)$ (15)

Im allgemeinen werden die kritischen Werte nicht angenommen. Wir geben dazu das

Beispiel 3

Wir wählen $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$. Dann gilt für jedes mit $0 < \sigma < 1$:

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2(1-\sigma^2)}}}{\sqrt{2\pi(1-\sigma^2)}} \cdot e^{-\frac{(x-t)^2}{2\sigma^2}}\, dt$$

Also ist $\phi(t,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\sigma^2)}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2(1-\sigma^2)}}$

Für $\sigma = 1$ gibt es keine Funktion der Schar mehr. Würde nämlich eine Funktion $\phi(t,1)$ existieren, so müßten - wie wir in Satz (19) beweisen - für fast alle t gelten

$$\lim_{\sigma \to 1} \phi(t,\sigma^2) = \phi(t,1)$$

Für alle $t \neq 0$ gilt aber

$$\lim_{\substack{\sigma \to 1 \\ \sigma < 1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\sigma^2)}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2(1-\sigma^2)}} = 0$$

0 ist aber nicht Vorgänger der Schar. Daher ist

$$\sigma_1(g) = \sigma_2(g) = \sigma_c(g) = \sigma(g) = 1.$$

Die kritischen Werte werden aber nicht angenommen.

Falls $\sigma_1(g)$ oder $\sigma_2(g)$ gleich $\sigma_c(g)$ ist, und dieser kritische Wert angenommen wird, so ist es möglich, daß die entsprechende Funktion integrabel, aber nicht beschränkt, oder aber beschränkt und nicht integrabel ist. Dazu zwei Beispiele.

Beispiel 4:

Wir setzen $\phi(t,1) = \begin{cases} |t|^{-\frac{1}{2}} & \text{für } 0 < |t| < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

und $g(x) = \phi(\cdot,1) * N(x,1)$.

Hier ist $\phi(t,1)$ integrabel, unbeschränkt und unstetig. Also ist auch hier $\sigma(g) = \sigma_c(g) = \sigma_1(g) = 1$.

Beispiel 5:

Wir wählen $\phi(t,1) = \cos x^2$, $g(x) = \phi(\cdot,1) * N(x,1)$. Wie wir aus Beispiel 2, 2. Fall sehen und dort bereits diskutiert haben, sind $\cos x^2$ und seine wie $e^{\delta x^2}$ wachsenden Vorgänger weder L_1 noch L_2-integrabel. Alle Nachfolger von $\cos x^2$ werden durch $e^{-\gamma x^2}$ mit geeignetem positivem γ dominiert und sind daher L_1- und L_2-integrabel. Daher ist auch hier $\sigma_1(g) = \sigma_2(g) = \sigma_c(g) = 1$.

Wir wollen nun das Verhalten der Schar in den Endpunkten $\sigma = 0$ und $\sigma = \sigma(g)$ untersuchen. Sehr einfach ergibt sich der

Satz:

Sei $\phi(x,\sigma^2) \in G(g)$. Dann gilt für jedes reelle x:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{\sigma\to 0 \\ \sigma>0}} \phi(x,\sigma^2) = g(x) \\ \lim\limits_{\substack{\sigma\to \sigma(g) \\ \sigma<\sigma(g)}} \phi(x,\sigma^2) = g(x) \end{array}\right\} \quad (16)$$

Beweis:
Es sei $g(x) = \phi(\cdot) * N(x,\sigma_o^2)$. Dann gilt:

$$\sqrt{2\pi}\,|\,\sigma_o g(x) - \sqrt{\sigma_o^2-\sigma^2}\,\phi(x,\sigma^2)| \leq$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\phi(t)|(e^{-\frac{(x-t)^2}{2\sigma_o^2}} - e^{-\frac{(x-t)^2}{2(\sigma_o^2-\sigma^2)}})dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty}|\phi(t)|e^{-\frac{(x-t)^2}{2\sigma_o^2}}\,dt < +\infty$$

Da der Integrand gleichmäßig für $0\leq\sigma<\sigma_o$ durch eine integrable Funktion abgeschätzt ist, kann nach dem Satz von Lebesgue der Grenzübergang $\sigma\to 0$ unter dem Integral vorgenommen werden. Damit folgt dann leicht die Behauptung.

Für die Untersuchung des Grenzüberganges von σ gegen $\sigma(g)$ benötigen wir eine Verallgemeinerung des Begriffs "Stetigkeitspunkt" einer Funktion. Aus Natanson {9}, Seite 283, entnehmen wir die

Definition:
Sei f eine über dem Intervall $[a,b]$ integrable Funktion und x ein fester Punkt ε (a,b). Gilt dann

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt = 0 \qquad (17)$$

so heißt x ein Lebesgue-scher Punkt der Funktion f(t).

Wir schreiben kurz: x ist L.P. von f.

Für diesen Begriff gilt:

Satz:
Jeder Stetigkeitspunkt einer integrablen Funktion f ist auch L.P. dieser Funktion. Ist f über $[a,b]$ integrabel, so ist fast jeder Punkt von $[a,b]$ L.P. von f. (18)

Vgl. Natanson {9}, Seite 284-285.

Mit dieser Bezeichnung gilt:

Satz:

a) Existiert eine Funktion $\phi(t)$ mit $g(x) = \phi(\cdot) * N(x,\sigma^2(g))$, so ist fast jeder Punkt von $\phi(t)$ ein L.P. dieser Funktion.

b) In jedem L.P. x von $\phi(t)$ gilt:

$$\lim_{\substack{\sigma<\sigma(g)\\ \sigma\to\sigma(g)}} \phi(x,\sigma^2) = \phi(x) = \phi(x,\sigma^2(g)) \qquad (19)$$

Beweis:

Zur einfacheren Darstellung untersuchen wir den Grenzübergang

$$\lim_{n\to\infty} I(n) := \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \cdot e^{-n(t-x)^2} dt \qquad (20)$$

anstelle von

$$\lim_{\sigma^2\to\sigma^2(g)} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2(g)-\sigma^2)}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \cdot e^{-\frac{(t-x)^2}{2(\sigma^2(g)-\sigma^2)}} dt$$

Dann gilt:

1) Da $\phi(t) \cdot e^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2(g)}} \in L_1$ ist, existiert ein $n_o \in \mathbb{N}$ mit

$$\psi_x(t) := \phi(t) \cdot e^{-n_o(t-x)^2} \in L_1 \text{ für alle } x.$$

Speziell ist

$$\psi_o(t) := \phi(t) \cdot e^{-n_o t^2} \in L_1. \qquad (21)$$

Es sei $N_1 := \{x \mid |\psi_o(x)| = +\infty\}$

$N_2 := \{x \mid$ x ist kein L.P. von $\psi_o\}$

Wegen (18) und (21) ist $N := N_1 \cup N_2$ eine Menge vom Maß Null.

2) Für alle $x \in \bar{N}$ ist x ein L.P. von $\phi(t)$.

Beweis:

Aus (21) folgt:

$$|\psi_o(t) - \psi_o(x)| = |\phi(t)\, e^{-n_o t^2} - \phi(x)\, e^{-n_o x^2}| \geq$$

$$e^{-n_o t^2} \cdot |\phi(t) - \phi(x)| - |\phi(x)| \cdot |e^{-n_o t^2} - e^{-n_o x^2}|$$

Daher ist

$$\frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} |\phi(t) - \phi(x)|dt \leq e^{n_o(|x|+|h|)^2} \cdot$$

$$\left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} |\psi_o(t)-\psi_o(x)|dt + \frac{|\phi(x)|}{h} \int_x^{x+h} |e^{-n_o t^2} - e^{-n_o x^2}|dt\right)$$

Ist $x \in \bar{N}$, so ist wegen (21) $|\phi(x)| < +\infty$. Da $e^{-n_o t^2}$ stetig und x ein L.P. von ψ_o ist, folgt die Behauptung a) aus (18) und aus der Definition des L.P. in (17).

3) Aus 2) folgt mit derselben Schlußweise:
Ist $x \in \bar{N}$, so ist x ein L.P. der Funktion $\psi_x(t)$.

4) Wir setzen nun voraus, daß $\phi(t) \in L_1$ ist.
Es sei x fest aus $\bar{N}$ und a und b zwei feste Zahlen mit $1 + a < x < b - 1$. Dann ist

$$I(n) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{a} \phi(t)\, e^{-n(t-x)^2} dt$$

$$+ \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_a^b \phi(t)\, e^{-n(t-x)^2} dt + \sqrt{\frac{n}{\pi}} \cdot \int_b^{\infty} \phi(t)\, e^{-n(t-x)^2} dt$$

$$= I_1(n) + I_2(n) + I_3(n).$$

Dabei ist

$$|I_1(n)| \leq \sqrt{\frac{n}{\pi}}\ e^{-n} \int_{-\infty}^{a} |\phi(t)|dt \leq \sqrt{\frac{n}{\pi}}\ e^{-n} \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(t)|dt.$$

Daher ist

$$\lim_{n\to\infty} I_1(n) = 0.$$

Genauso zeigt man $\lim_{n\to\infty} I_3(n) = 0$.

Das verbleibende Integral $I_2(n) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_a^b \phi(t)\ e^{-n(t-x)^2} dt$

ist ein singuläres Integral mit dem Kern

$$K_n(t,x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\ e^{-n(t-x)^2} \tag{22}$$

Vgl. etwa Natanson {9}, Seite 311.

Für jedes $a \leq \alpha < x \leq \beta \leq b$ gilt nämlich:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\alpha}^{\beta} K_n(t,x)dt = 1$$

Für singuläre Integrale gilt der Satz von Faddejew:

Der Kern $K_n(t,x)$ besitze eine Majorante $L_n(t,x)$ mit den Eigenschaften

α) $|K_n(t,x)| \leq L_n(t,x)$

β) Für jedes feste $x \in (a,b)$ wächst $L_n(t,x)$ auf dem Segment $[a,x]$ monoton und fällt monoton auf dem Segment $[x,b]$.

γ) $\int_a^b L_n(t,x)dt < M(x) < +\infty$

(23)

Dann gilt für jede auf $[a,b]$ integrable Funktion $\phi(t)$, für die $t = x$ ein Lebesgue-Punkt ist:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b K_n(t,x)\ \phi(t)dt = \phi(x)$$

Da der Kern (22) die drei Bedingungen des Satzes erfüllt - wir brauchen ja nur $K_n(t,x) = L_n(t,x)$ zu setzen - so folgt

$$\lim_{n\to\infty} I_2(n) = \phi(x).$$

Damit ist die Behauptung für den Fall $\phi \in L_1$ bewiesen.

5) Es sei nun $\phi(t)$ beliebig und $x_o \in \bar{N}$. Dann gilt wegen (21) und 3)

$$\psi_{x_o}(t) = \phi(t)\, e^{-n_o(t-x_o)^2} \in L_1$$

x_o ist L.P. von $\psi_{x_o}(t)$.

Dann gilt nach dem Teil 4):

$$\phi(x_o) = \psi_{x_o}(x_o) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{x_o}(t)\; e^{-n(t-x_o)^2}\, dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\; e^{-(n+n_o)(t-x_o)^2}\, dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+n_o}} \cdot \sqrt{\frac{n+n_o}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\, e^{-(n+n_o)(t-x_o)^2}\, dt$$

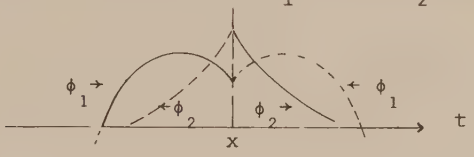
$$= 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\, e^{-n(t-x_o)^2}\, dt$$

Damit ist Satz (19) vollständig bewiesen.

Bemerkung:
Existiert in x der linksseitige und der rechtsseitige Limes $\phi(x-0)$ und $\phi(x+0)$, so ist

$$\lim_{\sigma^2\to\sigma^2(g)} \phi(x,\sigma^2) = \frac{1}{2}\,(\phi(x+0) + \phi(x-0)) \qquad (24)$$

Beweisidee: Man spiegele $\phi(t)$ an der Geraden $t = x$ und wende Satz (19) auf die beiden in x symmetrischen und in x stetigen Bildfunktionen $\phi_1(t)$ und $\phi_2(t)$ an.



Mit Hilfe von Satz (19) können wir leicht das Verhalten der Testschar im Punkt $\sigma = \sigma_o(g)$ bestimmen.

Satz:

a) Es sei g(x) nicht gleich einer Konstanten, weiter sei $G_o(g)$ nicht leer. Dann existiert $\phi(t,\sigma_o^2(g))$.

b) Allgemeiner gilt: Ist $g(x) \not\equiv K$, $G_c(g) \neq \emptyset$ und sind alle $\phi(t,\sigma^2) \in G_c(g)$ gleichmäßig beschränkt, so existiert $\phi(t,\sigma_c^2(g)) \in G_c(g)$. (25)

Beweis:

a) Es sei $\sigma_o(g) = +\infty$. In § 3, Satz (5) zeigen wir, daß daraus und aus der Forderung $|\phi(t,\sigma^2)| \leq 1$ für alle σ folgt, daß $\phi(t,\sigma^2)$ für alle t und alle σ^2 konstant $= g(x) = g(x_o)$ ist. Dies war aber ausgeschlossen. Wir können also weiter voraussetzen:

$$0 < \sigma_o(g) < +\infty.$$

Dann gilt für die Folge $\phi_n(t) := \phi(t,\sigma_o^2(g)-\frac{1}{n})$

1) $0 \leq \phi_n \leq 1$ (26)

2) Wegen der Beschränktheit von $\phi_n(t)$ existiert $\tilde{g}(x) := \phi_n(\cdot) * N(x,\sigma^2(g))$ für alle x. Wenden wir Satz (2) auf $\tilde{g}$ anstelle von g und $\phi_n(x,\frac{1}{n}) := \phi_n(\cdot) * N(x,\sigma^2(g)-\frac{1}{n}) = g(x)$ an, so folgt:

$$\phi_n(\cdot) * N(x,\sigma^2(g)) = g(\cdot) * N(x,\tfrac{1}{n}) \quad (27)$$

Nun benötigen wir den Satz von der schwachen Kompaktheit der Testfunktionen.

Es seien μ ein σ-endliches Maß auf (X,B) und F die Menge aller μ-integrablen Funktionen über (X,B). Dann gibt es zu jeder Folge von Testfunktionen $\{\phi_n\}$ eine Teilfolge $\{\phi_{n_K}\}$ und eine Testfunktion ϕ_o mit (28)

$$\lim_{K\to\infty} \int \phi_{n_K} \, f d\mu = \int \phi_o \, f d\mu$$

für alle $f \in F$.

Beweis: Witting {12}, Seite 65.

Wenden wir diesen Satz auf die Folge ϕ_n an, so existieren demnach ein ϕ_o mit $0 \leq \phi_o \leq 1$ und eine Teilfolge $\{\phi_{n_K}\}$ mit

$$\phi_o(\cdot) * N(x,\sigma^2(g)) = \lim_{K\to\infty} \phi_{n_K}(\cdot) * N(x,\sigma^2(g))$$

wegen (27)

$$= \lim_{K\to\infty} g(\cdot) * N(x,\tfrac{1}{n_K})$$

Dies ist aber wegen Satz (19), der Stetigkeit von $g(t)$ und $\lim \frac{1}{n_K} = 0$

$$= g(x).$$

Damit ist die Behauptung für den Fall $G_o(g) \neq \emptyset$ bewiesen.

b) Gilt nun für alle Funktionen aus $G_c(g)$: $|\phi(t,\sigma^2)| \leq K$, so wende man den eben bewiesenen Satz auf die Funktionen $\tilde{\phi}(t,\sigma^2) = \frac{1}{2} + \frac{\phi(t,\sigma^2)}{2K}$ an. Wegen $0 \leq \tilde{\phi} \leq 1$ wird dann die allgemeine Behauptung b) analog bewiesen.

Dieser Satz ist testtheoretisch wichtig. Er sagt nämlich aus, daß es zu jedem Test $\phi(t)$ mit der Gütefunktion $g(x) = \phi(\cdot) * N(x,\sigma^2)$ eine maximale Varianz $\sigma_o^2 \geq \sigma^2$ (d.h. auch ein minimaler Stichprobenumfang) gibt, zu der ein Test $\phi(t,\sigma_o^2)$ existiert, der dieselbe Gütefunktion $g(x) = \phi(\cdot,\sigma_o^2) * N(x,\sigma_o^2)$ liefert. Ist $g(x)$ nicht identisch gleich einer Konstanten, so kann man $\sigma_o^2 > \sigma^2$ nur erwarten, wenn $\phi(t)$ ein verallgemeinerter Test mit $0 < \phi(t) < 1$ ist und $\phi(t)$ fast überall mit einer analytischen Funktion übereinstimmt. Denn $\phi(t)$ stimmt dann fast überall mit $\phi(x,\sigma^2) = \phi(\cdot,\sigma_o^2) * N(x,\sigma_o^2-\sigma^2)$ überein; ist $g(x)$ nicht gleich einer Konstanten, so folgt daher aus $0 \leq \phi(t,\sigma_o^2) \leq 1$ dann $0 < \phi(x,\sigma^2) < 1$.

§ 3 Die Reihendarstellung von $\phi(t,\sigma^2)$

In diesem Paragraphen soll die folgende Voraussetzung stets gelten.

Es sei $\phi(t,\sigma_o^2)$ eine beschränkte, meßbare Funktion mit

a) $|\phi(t,\sigma_o^2)| \leq K$ und

b) $g(x) = \phi(\cdot,\sigma_o^2) * N(x,\sigma_o^2)$ (1)

Wir halten $g(x)$ und $\phi(t,\sigma_o^2)$ in diesem Paragraphen fest und geben eine Reihendarstellung für $\phi(t,\sigma^2)$ mit $0 < \sigma^2 \leq \sigma_o^2$ an. Dabei wollen wir nicht voraussetzen, daß $\sigma_o^2 = \sigma_o^2(g)$ oder $\sigma_c^2(g)$ ist, sondern wir wissen nur, daß für σ_o^2 die Relationen (1) erfüllt sind.

In den Beweisen zeigt sich, dass die Voraussetzung (1) zu stark ist. Es genügt für die in diesem Paragraphen angegebenen Reihenentwicklungen zu fordern, daß für die Funktion

$$k(x) := (\phi(\cdot,\sigma_o^2))^2 * N(x,\sigma_o^2)$$

gilt:

$$|k(x)| \leq K. \qquad (2)$$

Alle Behauptungen bleiben richtig, wenn nur (2) erfüllt ist. Damit werden zum Beispiel alle Funktionen $\phi(t,\sigma_o^2) \in L_2$ mit erfaßt. Da wir aber vor allem an Funktionen interessiert sind, die durch 1 beschränkt sind, wollen wir auf diese Erweiterung nicht näher eingehen.

Wichtig für die Untersuchung ist die folgende Ungleichung.

Satz:

Unter der Voraussetzung (1) gilt

a) $|g^{(n)}(x)| \leq K \cdot \frac{\sqrt{n!}}{\sigma_o^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$.

Dabei ist $g^{(n)}(x) := \frac{d^n g(x)}{dx^n}$ gesetzt worden. (3)

b) Im Falle n = 1 kann die Ungleichung leicht verschärft werden zu

$$|g^{(1)}(x)| \leq K \cdot \frac{1}{\sigma_o} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Beim Beweis benötigen wir einige Eigenschaften der Hermitischen Polynome $H_n(x,\alpha)$, die wir hier mit einigen später benutzten Formeln kurz zusammenstellen wollen; dabei wollen wir die Formel 4a) gleich als Definition der Hermitischen Polynome ansehen.

Hilfsformeln:

Für alle reellen Parameter α,σ,x,y und alle $n \in \mathbb{N}_o$ gilt:

a) $H_n(x,\alpha) := (-1)^n e^{\alpha x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\alpha x^2}$

b) $H_n(x,\alpha) = \alpha^n n! \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^m (2x)^{n-2m}}{\alpha^m m!\,(n-2m)!}$

Dabei ist $[x]$ die größte ganze Zahl, die kleiner als x ist.

c) $H_{n+1}(x,\alpha) - 2\alpha x H_n(x,\alpha) + 2n\alpha H_{n-1}(x,\alpha) = 0$

d) $H_n'(x,\alpha) = 2n\alpha \cdot H_{n-1}(x,\alpha)$

e) $H_n(x,\alpha) = (2\alpha)^{\frac{n}{2}} \cdot H_n(x\sqrt{2\alpha}, \frac{1}{2})$

f) $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t, \frac{1}{2\sigma^2}) e^{-\frac{(x-t)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{x^n}{\sigma^{2n}}$

g) $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t, \frac{1}{2\sigma^2})^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{n!}{\sigma^{2n}}$

h) $\int_y^{\infty} H_{n+1}(x,\alpha) e^{-\alpha x^2} dx = e^{-\alpha y^2} H_n(y,\alpha)$

(4)

i) $$|H_n(x,\frac{1}{2\sigma^2})| \leq \frac{e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}} \; 2^{\frac{n}{2}} \; \Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi}\cdot\sigma^n}$$

j) $$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_n(t,\frac{1}{2\sigma^2})| \; e^{-\frac{(x-t)^2}{2\sigma^2}} \, dt \leq \frac{\sqrt{n!}\; e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^n}$$

Beweis der Hilfsformel (4):

Die Formeln a), b), c), d), f), g) stehen bei etwas geänderter Bezeichnung bei Gröbner und Hofreiter,{5}, Seite 30.

e) folgt aus a) durch die Substitution u: = $\sqrt{2\alpha}\cdot x$

h) verifiziert man am leichtesten durch Differentiation nach y: dann folgt wegen d)

$$-H_{n+1}(y,\alpha)\, e^{-\alpha y^2} = -2\alpha y \; e^{-\alpha y^2} \cdot H_n(y,\alpha) + 2n\alpha \; e^{-\alpha y^2} \cdot H_{n-1}(y,\alpha)$$

oder

$$H_{n+1}(y,\alpha) - 2\alpha y \cdot H_n(y,\alpha) + 2n\alpha \cdot H_{n-1}(y,\alpha) = 0.$$

Dies ist aber gerade die Relation c).

Daher kann sich die linke und die rechte Seite von h) nur um eine Konstante K unterscheiden. Schickt man y gegen $+\infty$, so ergibt sich K = 0.

i) steht bei Lukasc {8}, Seite 78 für $\sigma = 1$. Für beliebige σ folgt sie dann aus e).

j) folgt aus g) mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_n(t,\frac{1}{2\sigma^2})|\, e^{-\frac{(x-t)^2}{2\sigma^2}}\, dt \leq$$

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t,\frac{1}{2\sigma^2})^2\, e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-x)^2}{\sigma^2} + \frac{t^2}{2\sigma^2}}\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \text{(wegen g))}$$

$$\frac{\sqrt{n!}}{\sigma^n} \cdot \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-2x)^2}{2\sigma^2} + \frac{x^2}{\sigma^2}}\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{n!}\; e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^n}$$

Mit diesen Formeln ist der Beweis von (3) leicht zu führen:

a) $$g^{(n)}(x) = \frac{1}{\sigma_o\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t,\sigma_o^2) \left(\frac{d^n}{dx^n}\, e^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma_o^2}}\right) dt$$

$$= \frac{1}{\sigma_o\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t,\sigma_o^2) \cdot H_n(t-x, \frac{1}{2\sigma_o^2})\, e^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma_o^2}}\, dt$$

nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\leq \left(\frac{1}{\sigma_o\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^2(t,\sigma_o^2)\, e^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma_o^2}}\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{\sigma_o\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t-x,\frac{1}{2\sigma_o^2})^2\, e^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma_o^2}}\, dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

(wegen $|\phi(t,\sigma_o^2)| \leq K$ und 4g) folgt

$$\leq K \frac{\sqrt{n!}}{\sigma_o^n}$$

$$b)\ g^{(1)}(x) = \frac{1}{\sigma_o\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\,\frac{(t-x)}{\sigma_o^2}\,e^{-\frac{(t-x)^2}{\sigma_o^2}}\,dt$$

$$\leq \frac{2K}{\sigma_o\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{u}{\sigma_o^2}\,e^{-\frac{u^2}{2\sigma_o^2}}\,du = \frac{K}{\sigma_o^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Eine unmittelbare Folgerung von Satz (3) ist

Satz:
Ist $\sigma_c(g) = +\infty$ und $|\phi(t,\sigma^2)| \leq K$ für alle t und alle $\sigma^2 > 0$, so ist g(x) eine Konstante. (5)

Beweis:
Aus $|\phi(t,\sigma^2)| \leq K$ für alle t und alle $\sigma^2 > 0$ und (3) folgt $g^{(n)}(x) = 0$ für alle $n \geq 1$. Daher ist g(x) konstant.

Dagegen kann $\sigma_c(g) = +\infty$ und $\sup_{t,\sigma^2} |\phi(t,\sigma^2)| = +\infty$ eintreten.

Dazu

Beispiel 6
Setzt man in § 1, Satz (12) a = 0, b = -in, so folgt:

$$e^{inx} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{n^2\sigma^2}{2} + \text{int}} \cdot e^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}}\,dt$$

für alle $\sigma^2 > 0$. Ist also g(x) = cos nx, so ist $\sigma_c(g) = +\infty$, die Schar

$$\phi(t,\sigma^2) = e^{\frac{n^2\sigma^2}{2}} \cdot \cos nt$$

ist aber für $\sigma^2 \to +\infty$ nicht beschränkt.

Wir leiten nun als ein wichtiges Ergebnis ab, daß sich Satz (3) in gewissem Sinn umkehren läßt. Dabei können wir die Ungleichung in (3) sogar etwas - um den Faktor n^r - vergröbern. Wir erhalten aber keine Aussage über den Punkt σ_o. Es gilt der Satz:

Voraussetzung:
Die Funktion $g(x)$ erfülle für alle reellen x und alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung:

$$|g^{(n)}(x)| \leq K(x,\sigma_o^2) \frac{n^r \cdot \sqrt{n!}}{\sigma_o^n}$$

Dabei sind $\sigma_o > 0$ und $r \geq 0$ feste Konstante und $K(x,\sigma_o^2)$ eine von n unabhängige Funktion.

Dann gilt:
a) Für jedes σ mit $0 < \sigma < \sigma_o$ existiert ein $\phi(t,\sigma^2)$ mit (6)

$$g(x) = \phi(\cdot,\sigma^2) * N(x,\sigma^2).$$

b) Mit einem beliebigen reellen x_o läßt sich $\phi(x,\sigma^2)$ darstellen als

$$\phi(x,\sigma^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(x_o)}{n!} \sigma^{2n} \cdot H_n(x-x_o, \frac{1}{2\sigma^2})$$

c) Die Reihe konvergiert absolut. Ist $K(x,\sigma^2)$ in einem Kompaktum beschränkt, so ist die Konvergenz der Reihe auf diesem Kompaktum gleichmäßig in x.

Bemerkung:
Ist die Voraussetzung des Satzes erfüllt, so können wir also in der Taylorentwicklung von $g(x)$:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(x_o)}{n!} \cdot (x-x_o)^n$$

formal das Polynom $(x-x_o)^n$ durch das Polynom

$$\sigma^{2n} \cdot H_n(x-x_o, \frac{1}{2\sigma^2})$$

ersetzen und erhalten $\phi(x,\sigma^2)$.

Beweis:

1) Aus der vorausgesetzten Abschätzung von $g^{(n)}(x)$ und 4i) folgt

$$a_n := \left| \frac{g^{(n)}(x_o)\ \sigma^{2n}\ H_n(x-x_o, \frac{1}{2\sigma^2})}{n!} \right|$$

$$\leq \frac{K\ n^r \cdot \sigma^{2n} \cdot 2^{\frac{n}{2}}\ \Gamma(\frac{n+1}{2})\ e^{\frac{(x-x_o)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma_o^n \cdot \sqrt{n!} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \sigma^n} \qquad (7)$$

Nun gilt für die Gammafunktion die Relation:

$$\Gamma(\tfrac{n+1}{2})\Gamma(\tfrac{n}{2}+1) = \frac{\sqrt{\pi}\ \Gamma(n+1)}{2^n} \qquad (8)$$

Aus der Monotonie der Γ-Funktion folgt:

$$\Gamma(\tfrac{n+1}{2})^2 \leq \Gamma(\tfrac{n+1}{2})\ \Gamma(\tfrac{n+2}{2})$$

Zusammen mit (8) ergibt sich damit

$$2^{\frac{n}{2}}\ \Gamma(\tfrac{n+1}{2}) \leq \sqrt[4]{\pi} \cdot \sqrt{n!} \qquad (9)$$

Setzt man dies in (7) ein, folgt

$$a_n \leq \pi^{-\frac{1}{4}}\ K(x_o, \sigma_o^2)\ e^{\frac{(x-x_o)^2}{2\sigma^2}} \cdot n^r\ (\frac{\sigma}{\sigma_o})^n$$

Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^r \cdot q^n$ für $r > 0$, $|q| < 1$ absolut konvergiert, ist damit die absolute Konvergenz der Reihe (6)b für $\phi(x,\sigma^2)$ und alle $0 < \sigma < \sigma_o^2$ gesichert. Ist $K(x,\sigma_o^2)$ in einem Kompaktum beschränkt, so ist dort die Konvergenz gleichmäßig.

2) Wir zeigen nun: $g(x) = \phi(\cdot,\sigma^2) * N(x,\sigma^2)$ für $0<\sigma<\sigma_o$

$$\phi(\cdot,\sigma^2) * N(x,\sigma^2) =$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(x_o)\cdot\sigma^{2n}}{n!} \cdot H_n\left(t-x_o, \frac{1}{2\sigma^2}\right) e^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (10)$$

Nun ist nach Voraussetzung und wegen 4 j):

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N} \cdot \frac{|g^{(n)}(x_o)|\cdot\sigma^{2n}}{n!} \left| H_n\left(t-x_o, \frac{1}{2\sigma^2}\right)\right| e^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}} dt$$

$$\leq K(x_o,\sigma_o^2)\cdot e^{\frac{(x-x_o)^2}{2\sigma^2}} \sum_{n=0}^{N} n^r \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_o}\right)^n \leqq L(x_o, \sigma_o^2) < \infty$$

Nach dem im folgenden zitierten Satz von Lebesgue ist die Reihe der Absolut-Beträge integrabel, nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz kann daher in (10) Summation und Integration vertauscht werden.

Der Satz von Lebesgue sagt aus:

Es seien $f_1 \leqq f_2 \leqq \ldots$ integrable Funktionen mit $\int_M f_n d\mu < C$ bei $C<\infty$. Dann ist $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ integrabel mit $\int_A f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$ für jedes meßbare A. (11)

Beweis: Richter {10} Seite 180

Aus (10) folgt deshalb wegen (4 f):

$$\phi(\cdot,\sigma^2) * N(x,\sigma^2) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(n)}(x_o)\cdot \frac{\sigma^{2n}}{n!} \cdot \frac{(x-x_o)^n}{\sigma^{2n}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(x_o)}{n!} (x-x_o)^n = g(x)$$

Aus diesem Satz läßt sich leicht eine noch einfachere Darstellung der Schar für alle $\sigma^2 < \sigma_o^2$ ableiten:

Satz:

Es sei die Voraussetzung von Satz (6) erfüllt. Dann gilt für jedes σ mit $0<\sigma<\sigma_o$

a)Es existiert $\phi(t,\sigma^2)$ mit

$$g(x) = \phi(\cdot,\sigma^2) * N(x,\sigma^2)$$

b) $$\phi(x,\sigma^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(2n)}(x)}{n!\,2^n}\ \sigma^{2n}\ (-1)^n$$

c)Die Reihe konvergiert absolut. Ist die Funktion $K(x,\sigma_o^2)$ aus der Voraussetzung von Satz (6) gleichmäßig für alle x beschränkt:

$$K(x,\sigma_o^2) \leq K(\sigma_o^2),$$

so ist $\phi(x,\sigma^2)$ beschränkt. Die Reihe b) konvergiert dann absolut und gleichmäßig in x. (12)

Beweis:
Man setzt in (6) $x=x_o$ und beachtet, daß $H_n(x,\alpha)$ bei ungeradem n eine ungerade Funktion mit $H_n(0,\alpha) = 0$ ist. Aus (4)b) folgt $H_{2n}\left(0, \frac{1}{2\sigma^2}\right) = (-1)^n \cdot \frac{1}{(2\sigma^2)^n} \cdot \frac{(2n)!}{n!}$. Setzt man dies in (6) ein, so folgen sofort die Behauptungen a) und b) des Satzes. Es ist nur noch Behauptung c) zu beweisen.
Wegen (6) gilt:

$$|g^{(2n)}(x)| \leq K(x,\sigma_o^2)\ \frac{(2n)^r \cdot \sqrt{(2n)!}}{\sigma_o^{2n}}$$

Aus (8) folgt:

$$\sqrt{\pi}(2n)! = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2n+1) = 2^{2n}\,\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\Gamma(n+1) \leq 2^{2n}(n!)^2$$

Aus beidem folgt:

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{|g^{(2n)}(x)|}{2^n\,n!}\ \sigma^{2n} \leq K(x,\sigma_o^2) \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(2n)^r \cdot \sqrt{(2n)!} \cdot \sigma^{2n}}{\sigma_o^{2n} \cdot n!\,2^n}$$

$$\leq K(x,\sigma_o^2) \cdot \pi^{-\frac{1}{4}} \cdot \sum_{n=m}^{\infty} (2n)^r \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_o}\right)^{2n}$$

Wegen $0<\sigma<\sigma_o$ konvergiert die Reihe. Daraus und aus b) folgt die absolute Konvergenz der Reihe für $\phi(t,\sigma^2)$.

Ist $K(x,\sigma_o^2) \leqq K(\sigma_o^2)$, so ist die Konvergenz gleichmäßig in x; setzt man m=0, so ergibt sich wegen b) die Beschränktheit von $\phi(t,\sigma^2)$.

Bemerkungen:

a) Man kann den Satz (12) auch direkt ableiten. Dazu betrachtet man $\phi(x,\sigma^2)$ als analytische Funktion von σ^2 und verwendet, daß $\phi(x,\sigma^2)$ der partiellen Differentialgleichung genügt:

$$\frac{\partial^n}{\partial(\sigma^2)^n} \cdot \phi(x,\sigma^2) = (-\frac{1}{2})^n \cdot \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \cdot \phi(x,\sigma^2) \qquad (13)$$

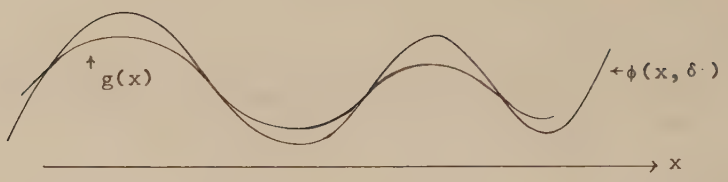
Ist $\phi(x,\sigma_o^2)$ beschränkt, so ist $\phi(x,\sigma^2)$ auch in $\sigma^2=0$ analytisch und kann in $\sigma^2=0$ in eine Potenzreihe entwickelt werden.

Betrachtet man die dann entstehende Reihe und berücksichtigt (13), so erhält man die Darstellung b) von Satz (12). Um zu zeigen, daß umgekehrt aus der Voraussetzung von Satz (6) die Darstellung a) von (12) folgt, entwickelt man g(x) in eine Potenzreihe und schreibt die Reihe für $\phi(x,\sigma^2)$ als Doppelreihe. Vertauscht man die Reihenfolge von Summation und Integration und ordnet die Doppelreihe um, so erhält man die gesuchte Behauptung. Mit Hilfe der Ungleichung über $g^{(n)}$ aus (6) zeigt man, daß die Vertauschung der Grenzprozesse gerechtfertigt ist.

b) Die Reihendarstellung von $\phi(t,\sigma^2)$ gibt ein anschauliches Bild, wie sich $\phi(t,\sigma^2)$ für kleine σ^2 langsam aus g(x) zurückentwickeln läßt. Für eine heuristische Betrachtung nehmen wir an, daß σ^2 sehr klein ist: $\sigma^2=\delta$. Dann ist in erster Näherung

$$\phi(x,\delta) \cong g(x) - \frac{\delta}{2} \cdot g^{(2)}(x).$$

Ist $g^{(2)}(x)>0$, so ist g(x) nach unten gekrümmt, $\phi(x,\delta)$ liegt daher bei stärkerer Krümmung unterhalb von g. Ist $g^{(2)}(x)>0$, so ist g(x) nach oben gekrümmt, $\phi(x,\delta)$ liegt oberhalb von g. Ist $g^{(2)}(x) = 0$, dann wird $g(x) \cong \phi(x,\delta)$ sein. Es ergibt sich also in erster Näherung dieses Bild:



Man erkennt deutlich den Glättungseffekt, den die Integration auf $\phi(x,\delta)$ ausübt.

Wir haben bisher nichts darüber gesagt, was in $\sigma = \sigma_o$ geschieht:

Existiert $\phi(t,\sigma_o^2)$ und ist $|\phi(t,\sigma_o^2)| \leq K$, so gilt die Ungleichung (3)a . Zusätzlich ist $|\phi(t,\sigma^2)| \leq K$ für alle $\sigma^2 < \sigma_o^2$.

Gilt nun für ein g(x) in der gröberen Ungleichung von (6) $K(x,\sigma_o^2) \leq K(\sigma_o^2)$, so folgt nur, daß $\phi(t,\sigma^2)$ für alle $0 < \sigma^2 < \sigma_o^2$ existiert und beschränkt ist. Wie Beispiel (7) zeigt, folgt daraus weder, daß eine Grenzfunktion $\phi(t,\sigma_o^2)$ existiert, noch, daß die Schar $\{\phi(t,\sigma^2) \mid 0 < \sigma^2 < \sigma_o^2\}$ gleichmäßig beschränkt ist. Erst wenn zusätzlich gefordert wird, $|\phi(t,\sigma^2)| \leq K$ für alle t und $\sigma^2 < \sigma_o^2$, folgt die Existenz von $\phi(t,\sigma_o^2)$. Die Frage, ob im Falle der Existenz von $\phi(t,\sigma_o^2)$ die in (12)b angegebene Reihenentwicklung für $\phi(t,\sigma_o^2)$ konvergiert, ist nicht gelöst. Wir bestimmen stattdessen in (27) eine gleichmäßig konvergente Reihenentwicklung für

$$\int_x^\infty \phi(t,\sigma_o^2)\, e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\, dt$$

Beispiel 7:

Wir wählen $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Dann gilt nach 4 i)

$$\left|\frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}\right| \leq \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \leq \text{(wegen (9))}$$

$$\leq \pi^{-\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{n!}$$

Damit sind die Voraussetzungen des Satzes (6) mit

$K(x,\sigma_o) = \pi^{-\frac{1}{4}}$, $r=0$, $\sigma_o=1$ erfüllt.

Wie wir aber in Beispiel (3) gesehen haben, ist $\sigma_c(g)=1$. Eine Grenzfunktion $\phi(x,1)$ existiert jedoch nicht.

Wir haben $\phi(t,\sigma^2)$ für alle $\sigma^2<\sigma_o^2$ bestimmt. Wählen wir $\sigma_o = \sigma_o(g)$ und setzen voraus, daß es überhaupt eine Testfunktion $\phi(t,\sigma^2)$ mit $0\leqq\phi\leqq 1$ gibt, dann ist die Existenz der gesuchten Grenzfunktion $\phi(t,\sigma_o^2(g))$ bereits gesichert. Bis jetzt können wir diese Funktion aber nur punktweise durch einen doppelten Grenzübergang bestimmen, erstens durch Aufsummieren der Reihe von $\phi(t,\sigma^2)$ mit $\sigma<\sigma_o$, zweitens durch den Grenzübergang $\sigma\to\sigma_o$. Dieser Grenzwert stellt auch nur in den Lebesgueschen Punkten von $\phi(t,\sigma_o^2(g))$ die gesuchte Funktion dar.

Da sich die Hermitischen Polynome als geeignetes Mittel zur Lösung unseres Problems erwiesen haben, und weil die Hermitischen Polynome bei geeigneter Gewichtung ein vollständiges Orthonormalsystem im L_2 bilden, liegt es nahe, daß die Behandlung unseres Problems im reellen Hilbertraum L_2 uns neue Aufschlüsse bringt.

Dazu benötigen wir noch einige bekannte Sätze aus der Funktionalanalysis: Zuvor noch einige

Bezeichnungen:

a) Für jedes $\alpha>0$ und alle x sei

$$h_n(x,\alpha) := H_n(x,\alpha)\cdot e^{-\frac{\alpha}{2}x^2} \qquad (14)$$

b) Wir bezeichnen mit $(f,g) = \int_{-\infty}^{+\infty} fg\,dx$ das Skalarprodukt im L_2 und mit $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$ die Norm.

Dann gelten die Sätze:

Satz:
Für jedes $\alpha>0$ bildet das System

$\{h_n(x,\alpha)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthogonalsystem im L_2. (15)

Dabei ist

$$\|h_n(x,\alpha)\|^2 = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad n! \cdot (2\alpha)^n$$

Beweis: Achieser, Glasmann {1} Seite 27

Für die nächsten beiden Sätze sei $\{e_n\}$ $n\in\mathbb{N}$, ein vollständiges Orthonormalsystem im L_2 und $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, seien zwei Folgen reeller Zahlen. Dann gilt:

Satz:
Eine Funktion $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$ ist genau dann $\in L_2$, wenn gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n{}^2 < +\infty \; . \qquad (16)$$

Ist dies der Fall, so ist $a_n = (f,e_n)$ und es gilt die Parsevalsche Gleichung:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$$

Beweis: Hellwig {7} Seite 25 und 26

Weiter benötigen wir den Satz über die verallgemeinerte Parsevalsche Gleichung .
Es seien f und g zwei Funktionen aus L_2 und $a_n = (f,e_n)$, $n\in\mathbb{N}$

und $b_n = (g,e_n)$, $n\in\mathbb{N}$.

Dann gilt für jedes ξ

$$\int_{-\infty}^{\xi} f\cdot g\cdot dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \int_{-\infty}^{\xi} e_n \cdot g \cdot dx. \qquad (17)$$

Dabei konvergiert die rechtsstehende Reihe absolut und gleichmäßig in ξ.(In der Literatur wird oft nur der Spezialfall, der sich für $\xi = +\infty$ ergibt:

$$(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$$

als verallgemeinerte Parsevalsche Gleichung bezeichnet. Auch hier gilt die absolute Konvergenz der Reihe. Wir werden beide Darstellungen verwenden.)

Beweis: Tricomi {11} , Seite 40
Der dort angegebene Satz ist für den L_2 [a,b] ausgesprochen. Im Beweis wird aber kein Gebrauch von der Endlichkeit der Grenzen a und b gemacht.

Um ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz von $\phi(t,\sigma_o^2)$ herzuleiten und um diese Funktion darzustellen, müssen wir den Bereich der betrachteten Funktionen über die beschränkten und über die L_2 integrablen Funktionen hinaus erweitern und definieren:

Definition:
Es seien $\sigma>0$, x_o reell und g(x) fest vorgegeben. Dann sei

$$G_{\sigma,x_o}(g) := \{\phi(t,\sigma^2)\ \varepsilon G(g) \mid \phi(t,\sigma^2)\cdot e^{-\frac{(t-x_o)^2}{4\sigma^2}} \varepsilon L_2\} \qquad (18)$$

Damit können wir schließlich den zentralen Satz formulieren:

Satz:
Es sei g(x) vorgegeben, $\sigma>0$ fest und x_o eine beliebige reelle Zahl. Dann existiert genau dann ein $\phi(t,\sigma^2)\varepsilon G_{\sigma,x_o}(g)$ mit

$$g(x) = \phi(\cdot,\sigma^2)*N(x,\sigma^2) \ ,$$

wenn gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(g^{(n)}(x_o))^2\cdot\sigma^{2n}}{n!} < +\infty$$

Dann ist

$$\phi(t,\sigma^2) = e^{\frac{(t-x_o)^2}{4\sigma^2}}\ \psi(t,\sigma^2) \ , \qquad (19)$$

wobei

$$\psi(t,\sigma^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(x_o)\cdot\sigma^{2n}}{n!}\ \cdot h_n\left(t-x_o,\frac{1}{2\sigma^2}\right)$$

ist. $\psi(t,\sigma^2)$ ist εL_2. Die Reihe konvergiert im quadratischen Mittel in der L_2 Norm; dabei ist

$$\| \psi(t,\sigma^2) \|^2 = \sigma\sqrt{2\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(g^{(n)}(x_o))^2 \cdot \sigma^{2n}}{n!}$$

Beweis:
Zur Abkürzung schreiben wir

$$\tilde{h}_n := h_n(t-x_o, \frac{1}{2\sigma^2}) \Big/ \| h_n(t-x_o, \frac{1}{2\sigma^2}) \| \qquad (20)$$

$$= \frac{e^{-\frac{(t-x_o)^2}{4\sigma^2}} \cdot H_n(t-x_o, \frac{1}{2\sigma^2})}{\left(\sigma\sqrt{2\pi} \cdot n!\ \sigma^{-2n}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Wegen (15) bilden die $\tilde{h}_n$ ein vollständiges Orthonormalsystem im L_2.

1. Es sei nun $\phi(t,\sigma^2) \in G_{\sigma,x_o}(g)$. Dann gilt

$$\psi(t,\sigma^2) := \phi(t,\sigma^2) \cdot e^{-\frac{(t-x_o)^2}{4\sigma^2}} \in L_2$$

und wegen $\phi(t,\sigma^2) \in G(g)$ gilt:

$$\sigma\sqrt{2\pi} \cdot g(x) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t,\sigma^2) \cdot e^{-\frac{(t-x_o)^2}{4\sigma^2}} \cdot e^{+\frac{(t-x_o)^2}{4\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}} dt$$

$$= (\psi(t,\sigma^2), f(t)).$$

Dabei ist $f(t) := e^{+\frac{(t-x_o)^2}{4\sigma^2} - \frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}} \in L_2$.

Nach der verallgemeinerten Parsevalschen Gleichung (17) ist

$$(\psi, f) = \sum_{n=0}^{\infty} (\psi, \tilde{h}_n) \cdot (f, \tilde{h}_n)$$

Dabei ist

$$(f,h_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{(t-x_o)^2}{4\sigma^2} - \frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(t-x_o)^2}{4\sigma^2}} \cdot H_n(t-x_o \cdot \frac{1}{2\sigma^2})dt$$

$$= \sigma\sqrt{2\pi} \cdot \frac{(x-x_o)^n}{\sigma^{2n}} \qquad \text{(wegen 4f))}$$

Damit ergibt sich im Zusammenhang

$$\sigma\sqrt{2\pi} \cdot g(x) = (\psi,f) = \sum_{n=0}^{\infty} (\psi,\tilde{h}_n)\cdot\sigma\sqrt{2\pi} \cdot \frac{(x-x_o)^n}{\|h_n\| \cdot \sigma^{2n}}$$

Dies ist eine Darstellung von g(x) in einer wegen (17) absolut konvergenten Reihe. Da ψ und h_n von x frei sind, folgt aus der Analytizität von g(x):

$$(\psi,\tilde{h}_n) = \frac{g^{(n)}(x_o)\cdot \|h_n\| \cdot\sigma^{2n}}{n!} \qquad (21)$$

Die Parsevalsche Gleichung liefert schließlich mit (21)

$$\|\psi(t,\sigma^2)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (\psi,\tilde{h}_n)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{g^{(n)}(x_o)\cdot\sigma^{2n}\cdot\|h_n\|}{n!}\right)^2$$

Dies ist wegen $\|h_n\|^2 = \sigma\sqrt{2\pi} \cdot n!\cdot \sigma^{-2n}$

$$\|\psi(t,\sigma^2)\|^2 = \sigma\sqrt{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(g^{(n)}(x_o))^2\cdot\sigma^{2n}}{n!} < +\infty \qquad (22)$$

Damit ist die eine Richtung der Behauptung bewiesen.

2. Es sei nun für g(x) die Ungleichung (22) im Punkt x_o erfüllt.
Definieren wir $\psi(t,\sigma^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (\psi,\tilde{h}_n)\cdot\tilde{h}_n$

mit den durch (21) gegebenen Koeffizienten, dann ist wegen (22) $\psi(t,\sigma^2) \in L_2$.

Gehen wir mit dieser Funktion die Rechnungen von Teil 1) in umgekehrter Richtung durch, so ergibt sich

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t,\sigma^2) \cdot e^{\frac{(t-x_o)^2}{4\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}} dt$$

und damit

$$\phi(t,\sigma^2) = \psi(t,\sigma^2) \cdot e^{\frac{(t-x_o)^2}{4\sigma^2}} \in G_{\sigma,x_o}(g)$$

Aus diesem Satz ziehen wir noch ein wichtiges zweites Ergebnis.

Folgerung:

a) Es sei $g(x) < +\infty$. Dann ist die Gleichung

$$g(x) = \phi(\cdot,\sigma^2) * N(x,\sigma^2)$$

genau dann mit einer nicht-randomisierten Testfunktion $\phi(t,\sigma^2)$ zu lösen, wobei $\phi(t,\sigma^2)$ nur die Werte 0 und 1 annehmen kann, wenn für alle reellen x gilt:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(g^{(n)}(x))^2 \sigma^{2n}}{n!} \qquad (23)$$

b) Ist $\phi(t,\sigma^2)$ eine Testfunktion, d.h., gilt $0 \leq \phi(t,\sigma^2) \leq 1$, so gilt notwendig

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(g^{(n)}(x))^2 \sigma^{2n}}{n!} \leq g(x)$$

Steht in dieser Gleichung für ein x das Gleichheitszeichen, dann steht es bei allen x und es gilt a).

Beweis:

a1) Ist $\phi(t,\sigma^2)$ eine nicht randomisierte Testfunktion aus $G(g)$, so gilt

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t,\sigma^2) \cdot e^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}} dt \qquad (24)$$

Aus Satz (19) folgt aber:

$$k(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(g^{(n)}(x))^2 \sigma^{2n}}{n!} = \frac{\|\psi(t,\sigma^2)\|^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi(t,\sigma^2))^2 \, e^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}} dt \qquad (25)$$

Da nach Voraussetzung $\phi(t,\sigma^2)$ nur die Werte 0 und 1 annehmen kann, ist $\phi(t,\sigma^2) = \phi^2(t,\sigma^2)$. Daher stimmt die rechte Seite von (24) mit der rechten Seite der letzten Gleichung von (25) überein. Daher gilt dasselbe auch für die linken Seiten und es gilt: $g(x) = k(x)$.

a2) Es sei nun $g(x) = k(x)$ für alle x erfüllt. Deshalb ist wegen $k(x) < +\infty$ das Kriterium von Satz (19) erfüllt. Es existiert demnach eine Funktion $\phi(t,\sigma^2)$, die (24) erfüllt; für die Funktion

$$\psi(t,\sigma^2) = \phi(t,\sigma^2) \, e^{-\frac{(t-x)^2}{4\sigma^2}}$$

ist weiter nach (19) auch (25) erfüllt.

Wegen der Voraussetzung $g(x) = k(x)$ stimmen nun die rechten Seiten von (24) und (25) überein. Also ist

$$\phi(\cdot,\sigma^2) * N(x,\sigma^2) = \phi^2(\cdot,\sigma^2) * N(x,\sigma^2)$$

für alle x. Nach dem Eindeutigkeitssatz § 1, (2) folgt daraus fast überall

$$\phi(t,\sigma^2) = \phi^2(t,\sigma^2).$$

Dies ist nur möglich, wenn $\phi(t,\sigma^2)$ fast überall nur die Werte 0 oder 1 annimmt.

b) Es sei $0 \leq \phi(t,\sigma^2) \leq 1$.
Dann ist für ϕ (24) und (25) erfüllt. Wegen $0 \leq \phi^2 \leq \phi$ folgt dann sofort $k(x) \leq g(x)$ für alle x.
Ist für ein x_o $k(x_o) = g(x_o)$, so ist

$$(\phi(\cdot,\sigma^2) - \phi^2(\cdot,\sigma^2)) * N(x_o,\sigma^2) = 0$$

Da der Integrand nicht negativ ist, folgt

$$\phi(t,\sigma^2) = \phi^2(t,\sigma^2)$$

fast überall und deshalb $g(x) = k(x)$ für alle x.

Bemerkung:

In Satz (19) gilt

$$\phi(t,\sigma^2)\, e^{-\frac{(t-x)^2}{4\sigma^2}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(x)\sigma^{2n}}{n!} \cdot H_n\left(t-x, \frac{1}{2\sigma^2}\right) \right) e^{-\frac{(t-x)^2}{4\sigma^2}} \qquad (26)$$

nicht in dem von uns gewünschten Sinne einer punktweisen Übereinstimmung beider Seiten der Gleichung. Die Gleichung sagt aus, daß die Summe rechts im L_2 der Norm nach konvergiert und dort die linke Seite darstellt. Um von hier in absolut konvergenten Reihen zu gelangen, verwenden wir die verallgemeinerte Parsevalsche Gleichung. Sie gestattet es, (26) mit einer geeigneten Funktion $f \in L_2$ zu multiplizieren und gliedweise zu integrieren. Die so

entstehende Reihe ist absolut konvergent. Wir verwenden für f die Sprungfunktion

$$f(t) = \begin{cases} 0 & : t \leq x \\ e^{-\frac{(t-x)^2}{4\sigma^2}} & : t > x \end{cases}$$

Dann erhalten wir

Satz:

Existiert ein $\phi(t,\sigma^2) \in G_{\sigma,x_o}$, so gilt für jedes reelle x

$$\left.\begin{aligned} \int_x^\infty \phi(t,\sigma^2)\, e^{-\frac{(t-x_o)^2}{2\sigma^2}}\, dt &= g(x_o) \int_x^\infty e^{-\frac{(t-x_o)^2}{2\sigma^2}}\, dt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n)}(x_o)\,\sigma^{2n}}{n!}\, H_{n-1}(x-x_o, \tfrac{1}{2\sigma^2})\, e^{-\frac{(x-x_o)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Die Reihe ist absolut und gleichmäßig in x konvergent.

Beweis:

Aufgrund der verallgemeinerten Parsevalschen Gleichung (17) folgt aus (26):

$$\int_x^\infty \phi(t,\sigma^2)\, e^{-\frac{(t-x_o)^2}{2\sigma^2}}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(x_o)\,\sigma^{2n}}{n!} \cdot$$

$$\cdot \int_x^\infty e^{-\frac{(t-x_o)^2}{2\sigma^2}} \cdot H_n(t-x_o, \tfrac{1}{2\sigma^2})\, dt$$

Dabei ist nach (17) die Reihe absolut und gleichmäßig konvergent. Berücksichtigt man $H_o(x,\alpha) \equiv 1$ und (4h), dann ergibt sich bereits die Behauptung.

Differenziert man (27) nach x, so erhält man in jedem Lebesque Punkt x von $\phi(x,\sigma^2)$ die Darstellung:

$$\phi(x,\sigma^2) = g(x_o) + \frac{(x-x_o)}{\sigma^2} \cdot S(x,x_o) - \frac{d}{dx} S(x,x_o)$$

Dabei ist $S(x,x_o)$ die absolut und in jedem endlichen Intervall gleichmäßig in x konvergente Reihe

$$S(x,x_o) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n)}(x_o)\,\sigma^{2n}}{n!} H_{n-1}(x-x_o, \frac{1}{2\sigma^2}) .$$

§4 Analyse der Grundgleichung durch Fourier-Transformationen

Wir wollen in diesem Paragraphen auf einer Arbeit von Doetsch {4} aufbauen. In dieser untersucht er das Problem, zu einem gegebenen $g(x) \varepsilon L_2$ ein $\phi(t) \varepsilon L_2$ so zu finden, daß gilt

$$g(x) = \phi(\cdot) * N(x,\sigma^2) \qquad (1)$$

Er gibt in {4} , Seite 294 als Lösung den

Satz:
Zu einem gegebenen stetigen $g(x) \varepsilon L_2$ existiert genau dann ein $\phi(t) \varepsilon L_2$, welches (1) erfüllt ,wenn gilt

$$e^{\frac{\sigma^2}{2} y^2} \cdot F\{g(x)\} \varepsilon L_2$$

Ist dies der Fall, so ist

$$\phi(x) = F^{-1}\left\{ e^{\frac{\sigma^2}{2} y^2} F\{g(x)\}\right\} \qquad (2)$$

Dabei sind die Fouriertransformation und ihre Inverse wie in § 1 ( ) definiert.

Um dies Ergebnis auf unsere Fragestellung anzuwenden, transformieren wir unser Problem entsprechend: Es gilt nämlich

Satz:

Für jedes $\tau>\sigma$ sind die Gleichungen

a) $g(x) = \phi(\cdot,\sigma^2)*N(x,\sigma^2)$

und

b) $h(x,\tau^2,\sigma^2) = \psi(\cdot,\tau^2,\sigma^2)*N(x,\tau^2)$

äquivalent. Dabei ist

$$h(x,\tau^2,\sigma^2) = \frac{\sigma}{\tau}\cdot g\left(\frac{\sigma^2}{\tau^2}\,x\right)\cdot e^{-\frac{x^2}{2\tau^2}\left(1-\frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)} \qquad (3)$$

$$\psi(t,\tau^2,\sigma^2) = \phi(t,\sigma^2)\cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}\left(1-\frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)}$$

Ist $\phi(t,\sigma^2)$ Lösung von a), so ist $\psi(t,\tau^2,\sigma^2)$ Lösung von b) und umgekehrt.

Ist $\phi(t,\sigma^2)$ eine beschränkte Funktion, so ist für jedes $\tau>\sigma$ $\psi(t,\tau^2,\sigma^2)$ einfach und quadratisch integrabel. Darin liegt ein wesentlicher Vorteil dieser Umformung.

Beweis:

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t,\sigma^2)\cdot e^{-\frac{(x-t)^2}{2\sigma^2}}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t,\sigma^2)\cdot e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}\cdot\left(1-\frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)}\cdot$$

$$\cdot\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{(x-t)^2-t^2\cdot\left(1-\frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right\}}\,dt$$

Die geschweifte Klammer ergibt

$$(x-t)^2-t^2\left(1-\frac{\sigma^2}{\tau^2}\right) = \frac{\sigma^2}{\tau^2}\cdot\left(t-\frac{\tau^2}{\sigma^2}\cdot x\right)^2+\left(1-\frac{\tau^2}{\sigma^2}\right)x^2$$

Also ist

$$g(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}\cdot\left(1-\frac{\tau^2}{\sigma^2}\right)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t,\tau^2,\sigma^2)\cdot e^{-\frac{1}{2\tau^2}\cdot\left(t-\frac{\tau^2}{\sigma^2}x\right)^2}\,dt$$

Betrachtet man diese Gleichung an der Stelle $\frac{\sigma^2}{\tau^2}\cdot x$, so ergibt sich die Behauptung.

Mit Hilfe dieses Satzes (3) wollen wir aus (2) Schlüsse für unser allgemeineres Problem ziehen. Obwohl wir im wesentlichen nur beschränkte Funktionen $\phi(t,\sigma^2)$ als Lösungen von (1) suchen, ist es aus beweistechnischen Gründen zweckmäßig, zunächst eine größere Klasse zu untersuchen. Dazu führen wir ein:

Definition:

Für jedes $0<\gamma<1$ sei bei vorgegebenem stetigen $g(x)$

$$N_\gamma := \left\{\phi(t,\sigma^2)\;\middle|\;\begin{array}{l}1)\ g(x) = \phi(\cdot,\sigma^2)*N(x,\sigma^2)\\ \\ 2)\ \phi(t,\sigma^2)\cdot e^{-\frac{\gamma}{2\sigma^2}\cdot t^2} \in L_2\end{array}\right\} \qquad (4)$$

Wir bemerken dazu

a) Falls $\gamma<\gamma'$ ist, folgt $N_\gamma \subset N_{\gamma'}$

b) Im Allgemeinen ist $G(g) \supsetneq \bigcup_{0<\gamma<1} N_\gamma$; $G_c(g) \subsetneq \bigcap_{0<\gamma<1} N_\gamma$

Wir können nun Satz (2) auf unsere Fragestellung übertragen

Satz:

Eine Funktion $\phi(t,\sigma^2)$ ist genau dann $\in N_\gamma$ mit $0<\gamma<1$, wenn gilt

$$f(y,\sigma^2) := \sqrt{1-\gamma}\cdot e^{\frac{\sigma^2 y^2}{2(1-\gamma)}}\cdot F\{g((1-\gamma)x)\cdot e^{-\frac{\gamma(1-\gamma)x^2}{2\sigma^2}}\}\in L_2 \qquad (5)$$

Dann ist

$$\phi(t,\sigma^2) = e^{\frac{\gamma}{2\sigma^2}t^2}\cdot F^{-1}\{f(y,\sigma^2)\}\ .$$

Beweis:

Wir setzen in (3) $\tau^2 = \frac{\sigma^2}{1-\gamma}$. Dann ist

$$h(x,\tau^2,\sigma^2) = \sqrt{1-\gamma}\cdot g((1-\gamma)x)\cdot e^{-\frac{\gamma(1-\gamma)x^2}{2\sigma^2}}$$

$$\psi(t,\tau^2,\sigma^2) = \phi(t,\sigma^2)\cdot e^{-\frac{\gamma}{2\sigma^2}t^2}$$

Wendet man Satz (2) auf das Problem $h=\psi * N(x,\tau^2)$ mit den eben definierten Funktionen h und ψ an, so folgt die Behauptung.

Unser Ziel ist es, die nur im quadratischen Mittel konvergenten Integrale der Fouriertransformation durch absolut konvergente Integrale zu ersetzen.

Dazu benötigen wir noch einen Hilfssatz:

Hilfssatz:

Es sei $\phi(t,\sigma^2)\in N_\gamma$ und $\phi(t,\sigma'^2)$ ein Nachfolger von $\phi(t,\sigma^2)$ mit $0<\sigma'<\sigma$. Dann ist $\phi(t,\sigma'^2)\in N_\mu$ mit

$$\mu = \frac{\gamma\,\sigma'^2}{\gamma\sigma'^2+(1-\gamma)\sigma^2} < \gamma \qquad (6)$$

Beweis:

Es ist nach § 2, Satz (2)

$$\phi(x,\sigma'^2)\cdot\sqrt{2\pi(\sigma^2-\sigma'^2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t,\sigma^2)\cdot e^{-\frac{(x-t)^2}{2(\sigma^2-\sigma'^2)}}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi(t,\sigma^2)\cdot e^{-\frac{\gamma t^2}{2\sigma^2}})(e^{-\frac{(x-t)^2}{2(\sigma^2-\sigma'^2)}+\frac{\gamma t^2}{2\sigma^2}})dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} a(t)\cdot b(t)dt$$

Der erste Faktor $a(t)= \phi(t,\sigma^2)\cdot e^{-\frac{\gamma\cdot t^2}{2\sigma^2}}$ ist nach Voraussetzung $\in L_2$. Den Exponenten des Faktors b(t) formen wir um:

$$-\frac{(x-t)^2}{2(\sigma^2-\sigma'^2)} + \frac{\gamma t^2}{2\sigma^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sigma^2-\sigma'^2} - \frac{\gamma}{\sigma^2}\right)\left(t - \frac{\sigma^2 x}{\sigma^2-(\sigma^2-\sigma'^2)\gamma}\right)^2 + \frac{\gamma}{\gamma\sigma'^2+(1-\gamma)\sigma^2}\cdot\frac{x^2}{2}$$

$$= -\alpha(t-\beta x)^2 + \mu\cdot\frac{x^2}{2\sigma'^2}$$ mit positiven Konstanten α und β.

Daher ist

$$\phi(x,\sigma'^2) = \frac{e^{\frac{\mu\cdot x^2}{2\sigma'^2}}}{\sqrt{2\pi(\sigma^2-\sigma'^2)}}\cdot\int a(t)\cdot e^{-\alpha(t-\beta x)^2}\,dt$$

Da $a(t)\in L_2$, stellt nach § 1, Satz 7c das Integral eine Funktion aus L_2 dar. Aus der Definition von N_μ ergibt sich dann die Behauptung.
Damit gilt nun

Satz:

Es sei $g(x)$ beschränkt und $\phi(t,\sigma^2) \in N_\gamma$ mit $0<\gamma<1$. Dann gilt für jeden Nachfolger $\phi(t,\sigma'^2)$ mit $0<\sigma'<\sigma$:

a) $g(1-\mu)x)\cdot e^{-\frac{\mu(1-\mu)x^2}{2\sigma'^2}} \in L_1 \cap L_2$

b) $f(y,\sigma'^2) \in L_1 \cap L_2$

c) $\phi(t,\sigma'^2) = \frac{\sqrt{1-\mu}}{2\pi} \cdot e^{\frac{\mu}{2\sigma'^2} t^2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} l(x,y)dxdy$ (7)

Dabei ist μ definiert wie in (6) und $l(x,y) =$

$$\cos\{y(t-x)\}\cdot g((1-\mu)x)\cdot \exp\left\{\frac{\sigma'^2 y^2}{2(1-\mu)} - \frac{\mu(1-\mu)x^2}{2\sigma'^2}\right\}$$

Für jedes feste y ist $l(x,y) \in L_1 \cap L_2$, für jedes feste t ist $\int_{-\infty}^{+\infty} l(x,y)dx \in L_1 \cap L_2$.

Beweis:

a) ist evident.

b) Aus der Definition der Fouriertransformation folgt: Ist

$h(y) := F\{H(x)\}$, dann ist $h(\lambda y) = \frac{1}{\lambda} F\{H(\frac{x}{\lambda})\}$.

Daher folgt aus (5):

$$f((1-\gamma)y,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma}}\cdot e^{\frac{(1-\gamma)\sigma^2 y^2}{2}} F\left\{g(x)\cdot e^{-\frac{\gamma x^2}{2\sigma^2(1-\gamma)}}\right\} \quad (8)$$

Nach (6) gilt $\mu = \frac{\gamma\sigma'^2}{\gamma\sigma'^2+(1-\gamma)\sigma^2}$

Also ist $\frac{\mu}{\sigma'^2(1-\mu)} = \frac{\gamma}{\sigma^2(1-\gamma)}$ (9)

Bilden wir nun $f((1-\mu)y,\sigma'^2)$ analog zu (8) und berücksichtigen (9), so ergibt sich

$$f((1-\mu)y,\sigma'^2) = \frac{1}{\sqrt{1-\mu}} \; e^{\frac{(1-\mu)\sigma'^2}{2}y^2} \cdot F\{g(x)\cdot e^{-\frac{\mu x^2}{2\sigma'^2(1-\mu)}}\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\mu}} \cdot e^{\frac{(1-\gamma)\sigma^2}{2}\cdot\frac{\mu}{\gamma}y^2} \cdot F\{g(x)\cdot e^{\frac{\gamma x^2}{2\sigma^2(1-\gamma)}}\}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\gamma}{1-\mu}} \cdot e^{-\frac{(1-\gamma)\sigma^2}{2}\cdot(1-\frac{\mu}{\gamma})y^2} \cdot f((1-\gamma)y,\sigma^2)$$

$$= c_1 \cdot e^{-c_2\cdot y^2} \cdot f((1-\gamma)y,\sigma^2)$$

mit positiven Konstanten c_1 und c_2.

Da nach Satz (5) $f((1-\gamma)y,\sigma^2)\varepsilon L_2$ ist, ist $f((1-\mu)y,\sigma'^2)$ als Produkt zweier Funktionen aus L_2 selbst eine Funktion aus L_1.
Damit ergibt sich die Behauptung b.

c) Da sich für eine absolut integrable Funktion die Fouriertransformation durch absolut konvergente Integrale darstellen läßt, folgt aus den Sätzen (5) und (6) und den eben bewiesenen Punkten a) und b):

$$\phi(t,\sigma'^2) = \frac{\sqrt{1-\mu}}{2\pi} \cdot e^{\frac{\mu}{2\sigma'^2}t^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} 1(x,y)dx\right)dy$$

Dabei ist $\tilde{1}(x,y) = e^{-ity}\cdot e^{\frac{\sigma'^2\cdot y^2}{2(1-\mu)}} \cdot e^{+iyx}\cdot g((1-\mu)x)\cdot e^{-\frac{\mu(1-\mu)x^2}{2\sigma'^2}}$

Setzt man $1(x,y) = \text{Realteil } \tilde{1}(x,y)$, so folgt auch Behauptung c.

Wir wollen uns jetzt wieder den beschränkten Funktionen $\phi(t,\sigma^2)$ zuwenden. Bei ihnen ist $\phi \varepsilon N_\gamma$ für jedes positive γ. Es hat sich bei weiteren Untersuchungen gezeigt, daß wir - außer beim Beweis von (7) - keinen Vorteil daraus ziehen können, die Größen μ und γ als freie Parameter mitzuführen. Da wir γ frei wählen können, setzen wir bei einer Aussage mit γ und σ^2 $\gamma=\frac{1}{2\sigma^2}$; bei einer Aussage mit μ,σ'^2 und σ^2 wählen wir $\gamma=\frac{\sigma^2}{\sigma'^2+\sigma^2}$ und erhalten so $\mu=\frac{1}{2}$.

Wegen $\gamma=\frac{1}{2}$ untersuchen wir also die schon aus § 3 bekannte Menge

$$G_\sigma(g) := G_{\sigma,0}(g) = \{\, \phi(t,\sigma^2)\varepsilon\, G(g) \,\big|\, \phi(t,\sigma^2)e^{-\frac{t^2}{4\sigma^2}} \varepsilon L_2 .\}$$

Auf die bei beschränkten Funktionen unwesentliche Verschiebung um x_o im Exponenten der e-Funktion haben wir hier verzichtet.
Wir sprechen (7) für diesen Fall noch einmal gesondert aus:

Satz:

$\phi(t,\sigma^2)$ ist genau dann $\varepsilon\, G_\sigma(g)$, wenn

$$f(y,\sigma^2) := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{\sigma^2 y^2} \cdot F\{g(\tfrac{x}{2})\cdot e^{-\frac{x^2}{8\sigma^2}}\} \varepsilon L_2 \text{ ist.}$$

Ist dies der Fall, so ist

$$\phi(t,\sigma^2) = e^{\frac{t^2}{4\sigma^2}} \cdot F^{-1}\{f(y,\sigma^2)\}.$$

Ist $\phi(t,\sigma^2)$ ein Nachfolger der beschränkten Funktion $\phi(t,\sigma_o^2)$, mit $0<\sigma<\sigma_o$, so ist

$$\phi(t,\sigma^2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{t^2}{4\sigma^2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} l(x,y)\,dx\,dy. \qquad (10)$$

Dabei ist

$$l(x,y) = g(\tfrac{x}{2})\cdot\cos\{\, y(t-x)\,\} e^{\sigma^2 y^2 - \frac{x^2}{8\sigma^2}}$$

$1(x,y)$ ist absolut integrabel bezüglich x, $\int_{-\infty}^{+\infty} 1(x,y)dx$ ist absolut bezüglich y integrabel.

Vergleichen wir Satz (10) und § 3, Satz (19), dann finden wir eine Reihendarstellung von $f(y,\sigma^2)$. Es gilt

Satz:

$\phi(t,\sigma^2)$ ist genau dann $\epsilon\, G_\sigma(g)$, wenn die folgende Reihe konvergiert:

$$2\pi \cdot \sigma\sqrt{2\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(g^{(n)}(0))^2 \sigma^{2n}}{n!} =: M < \infty$$

Dann ist

a) $$f(y,\sigma^2) = 2\sigma\sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n g^{(n)}(0)}{n!\, 2^n} h_n(y, 2\sigma^2)$$

Die Reihe konvergiert in der L_2 Norm

b) $$\|f(y,\sigma^2)\|^2 = M$$

c) $$\phi(t,\sigma^2) = e^{\frac{t^2}{4\sigma^2}} \cdot F^{-1}\{f(y,\sigma^2)\}$$

(11)

Beweis:

a) Aus (10) folgt, daß $\phi \epsilon G_g(g)$ genau dann gilt, wenn

$$f(y,\sigma^2) = F\{\phi(t,\sigma^2) \cdot e^{-\frac{t^2}{4\sigma^2}}\} = F\{\psi(t,\sigma^2)\} \epsilon\, L_2 \text{ ist.}$$

Dabei ist $\psi(t,\sigma^2)$ definiert wie in § 3, (19) mit $x_o = 0$.

Nun gilt für Fourierintegrale genauso wie für Fourierreihen eine Parsevalsche Gleichung:

Für alle $f \epsilon L_2$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |F\{f\}|^2 dy \qquad (12)$$

oder

$$\| f \| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \| \mathcal{F}\{ f \} \|$$

Beweis Doetsch {4} Seite 287

(12) sagt aus, daß $\mathcal{F}$ ein stetiger, linearer Operator im L_2 ist. Da in § 3, (19) ψ durch eine im L_2 konvergente Reihe dargestellt ist, gilt also

$$f(y,\sigma^2) = \mathcal{F}\{\psi(t,\sigma^2)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)\sigma^{2n}}{n!} \cdot \mathcal{F}\{h_n(t,\frac{1}{2\sigma^2})\}$$

Nun gilt für die Fouriertransformierte der Hermitischen Funktionen

$$\mathcal{F}\{h_n(t,\alpha)\} = \alpha^n \, i^n \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \cdot h_n(y,\frac{1}{\alpha})$$

Man findet die Formel bei geänderten Bezeichnungen z.B. in Arsac {2} Seite 74

Setzen wir $\alpha = \frac{1}{2\sigma^2}$ ein, dann folgt (11a).

b) Aus der Parsevalschen Gleichung folgt

$$\| f \|^2 = \| \mathcal{F}\{\psi\} \|^2 = 2\pi \cdot \| \psi \|^2$$

Damit folgt b) aus § 3, (19).

Wir erwähnen noch ein Analogon zu § 3, Satz (23).

Satz:

a) Notwendig und hinreichend dafür, daß für g(x) die Gleichung gilt:

$$g(x) = \phi(\cdot,\sigma^2) * N(x,\sigma^2)$$

mit einer nicht randomisierten Testfunktion $\phi(t,\sigma^2)$, die nur die Werte 0 und 1 annehmen kann, ist das Bestehen der Gleichung:

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\, 2\,\pi\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\sigma^2}{2} y^2} \cdot \left| F\left\{ g(t) \cdot e^{\frac{-(t-x)^2}{2\sigma^2}} \right\} \right|^2 dy =: \tilde{g}(x) \qquad (13)$$

für alle reellen x.

b) Ist $\phi(t,\sigma^2)$ eine Testfunktion, so gilt notwendig

$$g(x) \geq \tilde{g}(x)$$

Gilt in dieser Ungleichung für ein x das Gleichheitszeichen, dann gilt es für alle x.

Der Beweis ist eine sinngemäße Übertragung des Beweises von § 3, Satz (23). Dabei wird mit der Parsevalschen Gleichung (12) und Satz (10) gearbeitet. Wir verzichten deshalb auf eine Wiederholung.
Bis jetzt haben wir nur die Frage der Existenz und der Beschränktheit von $\phi(t,\sigma^2)$ klären können. Offen blieb noch, wann $0 \leq \phi \leq 1$ gilt.
Dazu beweisen wir mit Hilfe von Satz (10)

Satz:

Es sei $0<g(x)<1$. Dann ist die Gleichung (1) genau dann mit einer Testfunktion $0 \leq \phi \leq 1$ zu lösen, wenn gilt:

a) $$f(y,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{\sigma^2 y^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx} g\left(\frac{x}{2}\right) \cdot e^{\frac{-x^2}{8\sigma^2}}\, dx \quad \in L_2$$

b) $$f_o(y,\sigma^2) := f(y,\sigma^2) \,/\, f(0,\sigma^2)$$

und

$$f_1(y,\sigma^2) := \frac{2\sigma\sqrt{\pi} \cdot e^{-y^2\sigma^2} - f(y,\sigma^2)}{2\sigma\sqrt{\pi} - f(0,\sigma^2)}$$

(14)

sind charakteristische Funktionen von zwei stetigen zufälligen Variablen.

Bemerkung:
1) Aus a) folgt, daß $f(y,\sigma^2)$ eine ganze analytische Funktion ist.
2) Ist $g(x)=0$ bzw. $g(x)=1$ für mindestens ein x, so ist dies nur dann mit $0\leq\phi\leq 1$ verträglich, wenn $\phi(t)$ fast überall 0 oder fast überall 1 ist. Dann ist aber $g(x)\equiv 0$ oder $g(x)\equiv 1$ für alle x.

Beweis:

Aus $0<g(x)<1$ folgt $0<f(0,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\frac{x}{2}) \cdot e^{-\frac{x^2}{8\sigma^2}}\, dx < 2\sigma\sqrt{\pi}$.

Daher sind bei f_o und f_1 die Nenner positiv.

1) Es existiere nun $0\leq\phi\leq 1$ mit

$$g(x) = \phi(\cdot)\, N(x,\sigma^2).$$

Dann ist nach Satz (10) die Bedingung a) erfüllt. Weiter gilt nach Satz (3) mit $\tau = \sqrt{2}\,\sigma$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot g(\tfrac{x}{2}) \cdot e^{-\frac{x^2}{8\sigma^2}} = ((\phi(t,\sigma^2) \cdot e^{-\frac{t^2}{4\sigma^2}}) * N(0,2\sigma^2))(x)$$

oder

$$h = \psi * N(x,2\sigma^2).$$

Es sei nun $c := \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\, dt$.

Dann ist $c>0$. Wäre $c=0$, so müßte $\phi(t,\sigma^2)=0$ fast überall sein und $g(x)\equiv 0$.

Daher ist $\frac{\psi}{c} \geq 0$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi}{c}\, dt = 1$.

Die Gleichung

$$\frac{h}{c} = \frac{\psi}{c} * N(x,2\sigma^2)$$

interpretieren wir nun als die Gleichung der Faltung

der Dichten von zwei zufälligen Variablen. Daher ist auch h die Dichte einer zufälligen Variablen und es gilt:

$$c = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(\frac{x}{2}) \cdot e^{-\frac{x^2}{8\sigma^2}} dx = f(0,\sigma^2)$$

Nach dem Faltungssatz für charakteristische Funktionen (=Faltungssatz für Fouriertransformationen) gilt:

$$F\{\frac{h}{c}\} = F\{\frac{\psi}{c}\} \cdot e^{-\sigma^2 y^2}$$

$F\{\frac{\psi}{c}\}$ ist demnach eine charakteristische Funktion.

Es gilt nach Definition von h und $f(y,\sigma^2)$:

$$F\{\frac{\psi}{c}\} = \frac{F\{h\} \cdot e^{\sigma^2 y^2}}{c} = \frac{f(y,\sigma^2)}{f(0,\sigma^2)} \qquad (15)$$

Damit ist die erste Bedingung von b) erfüllt.
Wir bemerken noch: Aus (15) folgt $c = F\{\psi\}|y=0$ (16)

Um die zweite Behauptung zu beweisen, beachten wir, daß die Funktionen $g_1 := 1-g$ und $\phi_1 := 1-\phi$ ebenfalls zwischen Null und Eins liegen und die Relation

$$g_1 = \phi_1 * N(x,\sigma^2)$$

erfüllen. Dann gilt nach (15) und (16):

$$\frac{F\{(1-\phi)\cdot e^{-\frac{t^2}{4\sigma^2}}\}}{F\{(1-\phi)\cdot e^{-\frac{t^2}{4\sigma^2}}\}|y=0} = \frac{2\sigma\sqrt{\pi}\cdot e^{-\sigma^2 y^2} - f(y,\sigma^2)}{2\sigma\sqrt{\pi} - f(0,\sigma^2)} = f_1(y,\sigma^2)$$

ist eine charakteristische Funktion.

2. Es seien nun die Bedingungen a,b,c des Satzes erfüllt. Dann gilt nach Satz (10) die Darstellung

$$g = \phi * N(x,\sigma^2) \qquad \text{oder}$$
$$h = \psi * N(x,2\sigma^2)$$

wobei $\psi \in L_2$ ist und $f(y,\sigma^2) = F\{\psi\}$.

Nach Voraussetzung ist $\frac{f(y,\sigma^2)}{f(0,\sigma^2)}$ eine charakteristische Funktion.

Daher ist $F^{-1}\left\{ \frac{f(y,\sigma^2)}{f(0,\sigma^2)} \right\} = \frac{\psi}{f(0,\sigma^2)} \geq 0.$

Da $f(0,\sigma^2) \geq 0$ ist, ist auch ψ und damit $\phi \geq 0$.
Die analoge Betrachtung für $f_1(y,\sigma^2)$ liefert $1-\phi \geq 0$ und damit $0 \leq \phi \leq 1$.

Als Konsequenz dieses Satzes können daher die Ergebnisse der Theorie der charakteristischen Funktionen angewendet werden. Wir bringen dafür zwei Sätze als Beispiele.

Es gilt der Satz von Bochner:

Eine komplexwertige Funktion einer reellen Variablen t ist eine charakteristische Funktion genau dann, wenn

a) f stetig ist

b) f(t) nicht-negativ definit ist

c) f(0)=1 ist. } (17)

Beweis Lukacs {8} Seite 71

Wenden wir dies auf Satz (11) an, so erhalten wir mit Hilfe von (14):

Folgerung:

$\phi(t,\sigma^2)$ ist genau dann Testfunktion, wenn

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(g^{(n)}(0))^2 \sigma^{2n}}{n!} < +\infty$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0) i^n}{n!\ 2^n} \cdot h_n(y, 2\sigma^2)$ und } (18)

$$(1-g(0))e^{-y^2\sigma^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)i^n}{n!2^n} \cdot h_n(y,2\sigma^2)$$

nicht-negativ definit sind.

Zum Abschluß dieses Paragraphen bringen wir einen Satz, der es uns erlaubt, zu entscheiden, ob $\phi(t,\sigma^2)$ auf einem oder auf jedem der Intervalle von $(-\infty,a]$ oder $[b,+\infty)$ konstant ist und dort nur die Werte Null oder Eins annimmt.

Dazu verwenden wir den folgenden Satz:

Satz:

Es sei F(x) eine Verteilungsfunktion mit der analytischen charakteristischen Funktion f(z). Dann ist F(x) genau dann nach links (bzw. nach rechts) beschränkt*), wenn seine charakteristische Funktion in der oberen (bzw. unteren Halbebene) analytisch ist und wenn es eine positive Konstante γ so gibt, daß

$$|f(z)| \leq e^{\gamma |z|} \qquad (19)$$

ist für alle z mit Imaginärteil (z)> 0 (bzw. Imaginärteil (z)< 0).

Beweis: Lukacs {8} Seite 200

*) Lukacs nennt eine Verteilungsfunktion F(x) nach links beschränkt und a das linke Extremum von F, wenn für alle $\delta>0$ gilt:

$$F(a-\delta) = 0, \qquad F(a+\delta) > 0.$$

Analog heißt F nach rechts beschränkt und b das rechte Extremum von F, wenn für alle $\delta>0$ gilt:

$$F(b-\delta) < 1, \qquad F(b+\delta) = 1.$$

Wir schließen daraus

Folgerung:

Mit den in (14) definierten Funktionen $f_i(y, \sigma^2)$ $i = 0,1$ und den Konstanten $i = 0$ bzw. $i = 1$ gilt:

1) Es existiert genau dann ein a, sodaß für alle $t \leq a$

$$\phi(t,\sigma^2) = i \qquad i = 0(\text{bzw. } 1)$$

ist, wenn es eine Konstante γ so gibt, daß für alle z mit positivem Imaginärteil gilt:

$$|f_i(z,\sigma^2)| \leq e^{\gamma |z|} \qquad i=0(\text{bzw.}1).$$

2) Es existiert genau dann ein b, sodaß für alle $t \geq b$

$$\phi(t,\sigma^2) = i \qquad i = 0(\text{bzw.}1)$$

ist, wenn es eine Konstante γ' so gibt, daß für alle z mit negativem Imaginärteil gilt:

$$|f_i(z,\sigma^2)| \leq e^{\gamma' |z|} \qquad i=0(\text{bzw.}1)$$

(20)

Zum Beweis beachte man nur, daß $f_0(y,\sigma^2)$ die (ganze analytische) charakteristische Funktion von

$$\frac{1}{c} \cdot \phi(t,\sigma^2) \cdot e^{-\frac{t^2}{4\sigma^2}}$$

und $f_1(y,\sigma^2)$ die (ganze analytische) charakteristische Funktion von

$$\frac{1}{c'} \cdot (1 - \phi(t,\sigma^2)) \cdot e^{-\frac{t^2}{4\sigma^2}}$$ ist, wobei c und c' positive Konstanten sind.

§ 5 Stabilität und Robustheit

In diesem Paragraphen wollen wir die folgenden Fragen untersuchen:

a) Wie groß ist der Glättungseffekt, den die Integration mit der e-Funktion als Gewichtung auf $\phi(t,\sigma^2)$ ausübt?

b) Wie stark ändert sich $\phi(t,\sigma^2)$ bei Änderung von $g(x)$?

c) Wie stark ändert sich $g(x)$, wenn wir statt des durch die Normalverteilung definierten Maßes ein durch eine beliebige andere Verteilungsfunktion F definiertes Maß dF verwenden und nun $g(x)$ mit $g(x) = \int \phi dF$ vergleichen?

Bei allen Untersuchungen wollen wir uns auf Funktionen $\phi(t,\sigma^2) \varepsilon G_c(g)$ beschränken. Als Antwort auf Frage a) geben wir den

Satz:

Es sei $g(x) = \phi(\cdot,\sigma^2) * N(x,\sigma^2)$ für alle $\sigma^2 < \sigma_c^2(g)$.

Dann ist für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $\phi^{(n)}(t,\sigma^2)$ gleichmäßig stetig in t und für $0 < \sigma^2 \leq \sigma_1^2 < \sigma_c^2(g)$ sogar gleichgradig in σ^2 . Speziell ist $g^{(n)}(x)$ gleichmäßig stetig in x. (1)

Beweis:

Es sei $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_c(g)$. Dann existiert nach Definition von $\sigma_c(g)$ eine beschränkte Funktion $\phi(t,\sigma_2^2)$ mit $\phi(x,\sigma^2) = \phi(\cdot, \sigma_2^2) * N(x,\sigma_2^2 - \sigma^2)$ für $0 \leq \sigma^2 < \sigma_2^2$. Dann gilt nach § 3, (3a) für $0 \leq \sigma^2 \leq \sigma_1^2$

$$|\phi^{(n)}(x,\sigma^2)| \leq \sup_t |\phi(t,\sigma_2^2)| \sqrt{\frac{n!}{(\sigma_2^2-\sigma^2)^n}}$$

$$< \sup_t |\phi(t,\sigma_2^2)| \sqrt{\frac{n!}{(\sigma_2^2-\sigma_1^2)^n}} =: \gamma_n$$

und daher

$$|\phi^{(n)}(x,\sigma^2) - \phi^{(n)}(x',\sigma^2)| \leq \gamma_{n+1} \cdot |x-x'|.$$

Durch den Glättungsfaktor $e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ und die Integration werden alle Sprünge der Funktion $\phi(t,\sigma^2(g))$ so stark ausgeglichen, daß der Verlauf der Bildfunktion g(x) die ursprünglichen Unstetigkeiten kaum noch verrät.
Wir müssen daher erwarten, daß umgekehrt bereits kleine Veränderungen von g(x) zu großen Veränderungen bei $\phi(t,\sigma^2)$ führen, die umso stärker werden, je größer σ^2 wird.
Vor allem werden wir selbst für gleichmäßig konvergente Folgen $\{g_n(x)\}$ $n\in\mathbb{N}$, die gegen ein g(x) konvergieren, nicht erwarten dürfen, daß die Folge $\{\phi_n(t,\sigma^2)\}$ $n\in\mathbb{N}$ für alle σ^2 gegen ein $\phi(t,\sigma^2)$ konvergiert. Dazu zwei Beispiele:

Beispiel 8

Wir wählen

$$g_n(x) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{e^{-\frac{n\sigma_o^2}{2}}}{n^k}\cos nx\right) \qquad n\in\mathbb{N}$$

$$k\geq 0, \quad \sigma_o \geq 0, \quad K+\sigma_o > 0$$

Dann gilt: $0\leq g_n(x)\leq 1$ und $\{g_n(x)\}$ konvergiert gleichmäßig gegen $g(x)=\frac{1}{2}$.

Aus Beispiel 3 folgt:

$$\phi_n(t,\sigma^2) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{e^{-\frac{n(\sigma_o^2-\sigma^2)}{2}}}{n^k}\cos nt\right)$$

für $n\in\mathbb{N}$ und alle $\sigma^2 > 0$

Daher ist für $0 \leq \sigma < \sigma_o$

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t,\sigma^2) = \phi(t,\sigma^2) = \frac{1}{2}$$

Dabei ist die Konvergenz gleichmäßig in t.
Für $\sigma > \sigma_o$ divergiert die Folge. Speziell existiert also im Falle $\sigma_o = 0$ überhaupt keine konvergente Folge vonVorgängern der $g_n(x)$, obwohl sich die $g_n(x)$ und g(x) beliebig weit zurückverfolgen lassen.

Im nächsten Beispiel läßt sich die Folge der $g_n(x)$ zwar ebenfalls beliebig weit zurückverfolgen, aber für die Grenzfunktion g(x) gilt $\sigma(g)=1$.

Beispiel 9:

Es sei $g_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{n^2}{1+n^2} - i\frac{n}{1+n^2}\right)}$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} =: g(x)$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig in x.

Setzt man in Beispiel 2: $\alpha=0$, $\beta = n$, so folgt:

$$\phi_n(t,1) = \sqrt{1-i\cdot n}\ \cdot e^{\frac{1}{2}int^2} \qquad (2)$$

denn für alle Nachfolger gilt:

$$\phi_n(x,1-\sigma^2) = \phi_n(\cdot,1) * N(x,\sigma^2)$$

$$= \sqrt{\frac{1-in}{1-i\sigma^2 n}}\ \cdot e^{\frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{-\sigma^2 n^2}{1+\sigma^4 n^2} + i\frac{n}{1+n^2\sigma^4}\right)}$$

Setzt man in diese Gleichung $\sigma^2=1$, so ergibt sich

$\phi_n(x,0) = g_n(x)$; damit ist (2) bestätigt.

Für $0<\sigma^2\leq 1$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x,1-\sigma^2) = \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \phi(x,1-\sigma^2)$$

Dagegen konvergiert die Folge $\phi_n(x,1)$ nirgends.

(Um die Formeln übersichtlicher zu halten, haben wir darauf verzichtet, nur den Realteil darzustellen.)

Wir dürfen daher Abschätzungen nur für "Nachfolger" und nur für kleine $\sigma^2>0$ erwarten.
Im weiteren setzen wir voraus:

Für $i = 1,2$ sei

$$g_i(x) = \phi_i(\cdot,\sigma_o^2) * N(x,\sigma_o^2)$$

$$|\phi_i(t,\sigma_o^2)| \leq K$$

$$0<\sigma<\sigma_o\leq \sigma_c(g), \qquad x \text{ bel.} \varepsilon \mathbb{R} \text{ und } m \text{ bel.} \varepsilon \mathbb{N}. \qquad (3)$$

Weiter sei $\Delta\phi(t,\sigma^2) := \phi_1(t,\sigma^2) - \phi_2(t,\sigma^2)$

$\Delta g(x) := g_1(x) - g_2(x)$

Dann gilt

Satz:

Unter der Voraussetzung (3) ist

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta\phi(t,\sigma^2))^2 \cdot e^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}} dt$$

$$\leq \sum_{n=0}^{m} \frac{(\Delta g^{(n)}(x))^2}{n!} \cdot \sigma^{2n} + 4K^2 \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma_o^2-\sigma^2} \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_o}\right)^{2m} \qquad (4)$$

Bemerkung:

Dieser Satz ist dann von Bedeutung, wenn man das Verhalten von ϕ in der Umgebung eines festen Punktes x studieren möchte. Danach lassen sich die gewichteten Abweichungen von ϕ_1 und ϕ_2 im quadratischen Mittel beliebig klein halten, wenn
a) die Ableitungen von g_1 und g_2 im Punkte x bis zur n-ten Ordnung möglichst gut übereinstimmen und
b) das Verhältnis $\sigma:\sigma_o$ hinreichend klein ist.

Beweis:
Aus (3) folgt $\Delta g = (\Delta\phi(\cdot,\sigma^2) * N(x,\sigma^2)$. Damit ist wegen § 3, Satz (19):

$$(\Delta\phi(\cdot,\sigma^2))^2 * N(x,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \| \Delta\psi(x,\sigma^2) \|^2$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Delta g^{(n)}(x))^2 \, \sigma^{2n}}{n!}$$

Wegen der Voraussetzung (3) und §3,(3) folgt:

$$\leq \sum_{n=0}^{m} \frac{(\Delta g^{(n)}(x))^2 \sigma^{2n}}{n!} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{4K^2 \cdot n! \cdot \sigma^{2n}}{(\sigma_o)^{2n} n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \frac{(\Delta g^{(n)}(x))^2 \sigma^{2n}}{n!} + 4K^2 \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma_o^2 - \sigma^2} \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_o}\right)^{2m} .$$

Soll dagegen $\Delta\phi(t,\sigma^2)$ punktweise abgeschätzt werden, so gilt:

Satz:

$$\left. | \Delta\phi(t,\sigma^2) | \leq \sum_{n=0}^{m} \frac{| \Delta g^{(2n)}(t) |}{n! 2^n} \cdot \sigma^{2n} + 2K \frac{\sigma^2}{\sigma_o^2 - \sigma^2} \left(\frac{\sigma}{\sigma_o}\right)^{2m} \right\} \quad (5)$$

Der Beweis folgt sofort aus § 3, Satz (12).

Für die Größe von $\Delta\phi$ - wie vor allem auch die Beispiele 8 und 9 zeigen - ist also nicht allein der Absolutbetrag von Δg, sondern wesentlich die Krümmung und die höheren Ableitungen von Δg maßgebend.

Ist m klein und σ groß, z.B. $\sigma = 10$, $m=3$, so ist die Forderung:

$$|\Delta g^{(2n)}| \leq \delta \quad \text{für} \quad 0 \leq n \leq 3 \tag{6}$$

zu schwach, da sie wegen der Ungleichung

$$|\Delta g^{(2n)}| \leq 2 \cdot K \cdot \frac{\sqrt{(2n)!}}{\sigma^{2n}}$$

meist bereits von selbst erfüllt ist.
Die kleine Schranke δ wird aber in der Abschätzung mit dem großen Wert $\frac{\sigma^{2n}}{n!\ 2^n}$ multipliziert und kann in der Summe noch einen wesentlichen Summanden darstellen. Aus diesem Grunde ist es sinnvoll, das Koordinatensystem um den Faktor σ zu strecken und damit zu den Funktionen $\tilde{g}(t) = g(\sigma t)$ und $\tilde{\phi}(t) = \phi(\sigma t)$ überzugehen. Dann gilt nämlich:

$$|\Delta\ \tilde{\phi}\ | \leq \sum_{n=0}^{m} \frac{|\Delta \tilde{g}^{(2n)}(t)|}{2^n n!} + 2K\ \frac{\sigma^2}{\sigma_o^2 - \sigma^2}\ \left(\frac{\sigma}{\sigma_o}\right)^{2m} .$$

Es genügt dann, zu fordern, daß Relation (6) für $\Delta\tilde{g}$ erfüllt ist.

Wir sind bisher von der Voraussetzung ausgegangen, daß die Verteilungsfunktion F(t) der zugrundeliegenden Statistik T die Normalverteilung ist und haben daraufhin Lösungen $\phi(t,\sigma^2)$ der Gleichung $g(x) = \phi(\cdot,\sigma^2) * N(x,\sigma^2)$ gesucht. Nun ist in der Praxis die Größe T meist nur näherungsweise normalverteilt. In der Regel ist die Verteilungsfunktion F(t) von T ein Element einer vom Stichprobenumfang n abhängenden Folge $F_n(t)$ von Verteilungen,

die gegen die Verteilungsfunktion der Normalverteilung $N(x,\sigma^2)$ nach Verteilung konvergieren. Lassen wir x und σ^2 variieren, so müssen wir statt mit den entsprechenden Normalverteilungen mit der Schar $F_n(t \,||\, x,\sigma^2)$ rechnen.

Wir erhalten also statt der Funktion

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t,\sigma^2).e^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}} \, dt \qquad (7)$$

die Funktion

$$f_n(x,\sigma^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t,\sigma^2) dF_n(t|| x,\sigma^2) \quad . \qquad (8)$$

Wir wollen nun x und $\sigma<\sigma_c(g)$ festhalten und (7) und (8) vergleichen.
Dieses Problem ist aber schon in der Literatur behandelt. Es gilt nämlich

Satz:

Es sei $F_n(y)$ verteilungskonvergent gegen die Verteilungsfunktion $H(y)$. Weiter sei $g(y,\tau)$ stetig in y und zwar gleichmäßig in τ für jede kompakte y-Menge, sowie $|g(y,\tau)| \leq M<\infty$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y,\tau) dF_n(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y,\tau) dH(y) \qquad (9)$$

gleichmäßig in τ.

Beweis Richter {10} Seite 335.

Folgerung:

Für jedes $0 \leq \sigma < \sigma_o(g)$ gilt mit den obigen Voraussetzungen

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t,\sigma^2) dF_n(t|| x,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t,\sigma^2) e^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}} \, dt \qquad (10)$$

Beweis:

Nach (1) ist $\phi(t,\sigma^2)$ gleichmäßig stetig.

Wir können aber aus Satz (9) nicht folgern, daß in (10) die Konvergenz gleichmäßig in σ^2 ist. Im Gegensatz zu (9) sind nämlich in (10) auch die Verteilungsfunktionen von σ abhängig.

Literaturverzeichnis

{1} N.I.Achieser und I.M. Glasmann
Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum
3. Auflage,1960, Akademie-Verlag Berlin

{2} J. Arsac
Transformation de Fourier et Théorie des Distributions
Dunod Paris 1961

{3} H. Behnke und F. Sommer
Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen
3.Auflage 1965 Springer Verlag Berlin Heidelberg New York

{4} G. Doetsch
Zerlegung einer Funktion in Gaußsche Fehlerkurven und zeitliche Zurückverfolgung eines Temperatur zustandes
Math. Z. 41 1936 S. 283-318

{5} W. Gröbner und N. Hofreiter
Integraltafel 2.Teil: Bestimmte Integrale
4. Auflage 1966 Springer Verlag Wien New York

{6} P.R. Halmos
Measure Theorie
1950 Van Nostrand Reinhold Company New York

{7} G. Hellwig
Differentialoperatoren der mathematischen Physik
1964 Springer Verlag Berlin Göttingen Heidelberg

{8} E. Lukacs
Characteristic Funktions
Second Edition 1970 Griffin London

{9} I.P. Natanson
Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen
2. Auflage 1961 Akademie Verlag Berlin

{10} H. Richter
Wahrscheinlichkeitstheorie
2. Auflage 1966 Springer Verlag Berlin Heidelberg
New York

{11} F. G. Tricomi
Vorlesungen über Orthogonalreihen
2. Auflage 1970 Springer Verlag Berlin Heidelberg
New York

{12} H. Witting
Mathematische Statistik
Studienbuchausgabe 1969 Teubner Verlag Stuttgart

L E B E N S L A U F

Am 8.5.1941 wurde ich in Oppeln, Oberschlesien, als zweites von drei Kindern geboren. Meine Eltern sind Prof. E.H. Kockelkorn, Ministerialrat i. R. und Eva Maria Kockelkorn, geb. Pfeiffer. Ich bin evangelisch erzogen, verheiratet und habe einen Sohn.

Die wichtigsten Daten:

8.5.1941	Geburt in Oppeln
1945	Flucht nach Gelnhausen/Hessen
1948-1955	Besuch der Volksschule und des Grimmelshausen-Gymnasiums in Gelnhausen
1955-1961	Besuch des I.Kant-Gymnasiums in Bad Oeynhausen
1.3.1961	Abitur
SS 1961-WS 1967/68	Studium der Mathematik an der Technischen Universität Berlin mit dem Diplom als Abschluß
SS 1964-WS 1967/68	Mitglied der Studienstiftung des Deutschen Volkes
ab 3.1.1968	Assistent bei Prof. Weichselberger
2o.12.1969	Heirat mit der Studienrätin Monika Weiher
5.3.1971	Geburt meines Sohnes Michael